LƯ SĨ PHÁP
Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

TOÁN 11



CHƯƠNG I
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

TẬP 1

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

NĂM 2017 – 2018

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

Nội dung gồm 3 phần
Phần 1. Kiến thức cần nắm
Phần 2. Dạng bài tập có hướng dẫn giải và bài tập đề nghị
Phần 3. Phần trắc nghiệm có đáp án.

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh.

Mọi góp ý xin gọi về số 01655.334.679 – 0916.620.899
Email: lsp0207@yahoo.com.vn
lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Tác giả
Lư Sĩ Pháp
Gv_Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

CHƯƠNG I
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG
---o0o---

§ 1. PHÉP BIẾN HÌNH

KIẾN THỨC CẦN NẮM

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M’ của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.
- Ta thường kí hiệu phép biến hình là *F* và viết *F*(*M*) = *M’* hay *M’* = *F*(*M*), khi đó *M’* gọi là ảnh của điểm *M* qua phép biến hình *F*.
- Phép biến hình biến mỗi điểm của mặt phẳng thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.
- Nếu *H* là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu *H’* = *F*(*H*) là tập các điểm *M’* = *F*(*M*), với mọi điểm *M* thuộc *H*. Khi đó ta nói *F* biến hình *H* thành *H’* hay *H’* là ảnh của *H* qua phép biến hình *F*.
- Để chứng minh hình *H’* là ảnh của hình *H* qua phép biến hình *F*, ta có thể chứng minh: Với điểm *M* tuỳ ý $M \in H \Leftrightarrow M' = F(M') \in H'$
- Với mỗi điểm *M*, ta xác định điểm *M’* trùng với *M* thì ta cũng được một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là phép đồng nhất.

§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Phép tịnh tiến

1. Định nghĩa phép tinh tiến

- Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm *M* thành điểm *M’* sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.
- Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$. Như vậy $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$
- Phép tịnh tiến theo vectơ_không được gọi là phép đồng nhất.

2. Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến

- Trong mặt phẳng toạ độ O*xy*, cho điểm $M(x;y); \vec{v} = (a;b)$. Gọi $M' = T_{\vec{v}}(M) = (x';y')$.
- Khi đó $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ gọi là biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.
- Vận dụng: $M'(x';y') = M(x;y) + \vec{v}(a;b)$

3. Các tính chất của phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ ba điểm đó;
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho;
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng dã cho;
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho;
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính;
- Biến góc thành góc bằng góc đã cho.

II. Phép dời hình

1. Định nghĩa

- Phép dời hình là một phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì
- Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình
- Nếu thực hiện liên tiếp hai phép dời hình, ta được một phép dời hình.

2. Tính chất

Phép dời hình

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toan thứ tự ba điểm ấy;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến một tam giác thành tam giác bằng đã cho, biến một góc thành góc bằng góc đã cho;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Tích của hai phép biến hình

Cho hai phép biến hình *F* và *G*, giả sử *M* là một điểm bất kì, phép biến hình *F*(*M*) = *M'* và phép biến hình *G*(*M'*) = *M"*. Khi đó phép biến hình biến điểm *M* thành điểm *M"* đươc gọi là hợp thành của phép *F* và *G*, kí hiệu $F \circ G$

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả những phép tịnh tiến biến a thành a'.

HD Giải

Lấy điểm *A* trên a thì với mỗi điểm *A'* trên a', phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ biến a thành a'. Đó là tất cả những phép tịnh tiến cần tìm.

Bài 2.2. Cho hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$. Với điểm *M* bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến điểm *M* thành *M'*, $T_{\vec{v}}$ biến điểm *M'* thành *M"*. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến điểm *M* thành *M"* là một phép tịnh tiến.

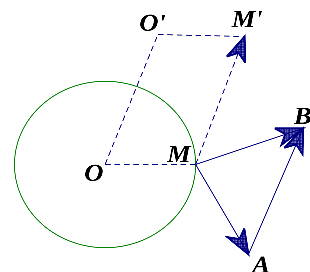
HD Giải

Ta có $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$ nên phép biến điểm *M* thành *M"* là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} + \vec{v}$

Bài 2.3. Cho đường tròn (*O*) và hai điểm *A*, *B*. Một điểm *M* thay đổi trên đường tròn (*O*). Tìm quỹ tích điểm *M'* sao cho $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM'}$.

HD Giải

Ta gọi *O* và *R* là tâm và bán kính của đường tròn (*O*), Ta có $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ biến điểm *M* thành *M'*. Điểm *M* chạy trên đường tròn (*O*) thì quỹ tích của điểm *M'* là đường tròn (*O'*) có tâm *O'* và bán kính *R* là ảnh của đường tròn (*O*) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.



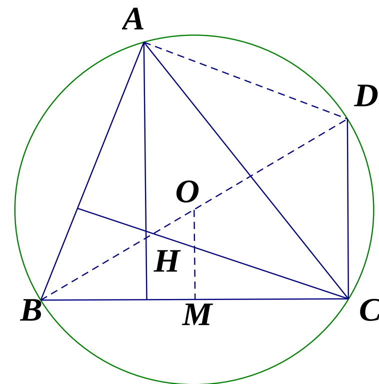
Bài 2.4. Cho hai điểm *B* và *C* cố định trên đường tròn (O) tâm *O*, điểm *A* di động trên đường tròn (*O*). Chứng minh rằng khi *A* di động trên đường tròn (*O*) thì trực tâm của tam giác *ABC* di động trên một đường tròn.

HD Giải

Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ABC* và *M* là trung điểm của *BC*. Tia *OB* cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *D*. Vì $\widehat{BCD} = 90^0$ nên *DC* // *AH*, tương tự ta có *AD* // *CH*

Do đó tứ giác *ADCH* là hình bình hành . Từ đó suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{OM}$. Ta thấy rằng $\overrightarrow{OM}$ không đổi, nên *H* là ảnh của *A* qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$.

Do vậy khi điểm *A* di động trên đường tròn (*O*) thì *H* di động trên đường tròn (*O'*) là ảnh của (*O*) qua phép tịnh tiến theo vectơ $2\overrightarrow{OM}$.



Bài 2.5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v}(-2;3)$ và đường thẳng *d* có phương trình $3x - 5y + 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng *d'* là ảnh của *d* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

HD ✍Giải

Cách 1.

Gọi $M(x;y)\in d, M'=T_{\vec{v}}(M)=(x';y')$. Khi đó $\begin{cases}x'=x-2\\y'=y+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+2\\y=y'-3\end{cases}$

Ta có $M\in d\Leftrightarrow 3(x'+2)-5(y'-3)+3=0\Leftrightarrow 3x'-5y'+24=0\Leftrightarrow M'\in d'$

Vậy $d': 3x-5y+24=0$

Cách 2.

Lấy một điểm thuộc *d*, chẳng hạn *M*(-1; 0). Khi đó $M'=T_{\vec{v}}(M)=(-3;3)$ thuộc *d'*.

Vì *d'* song song hoặc trùng với *d* nên *d'*: 3*x* – 5*y* + *c* = 0.

Do $M'\in d'$ nên 3(-3) – 5.3 + *c* = 0 suy ra *c* = 24. Vậy $d': 3x-5y+24=0$

Cách 3.

Ta cũng có thể lấy hai điểm phân biệt *M*, *N* trên *d*, tìm toạ độ các ảnh *M'*, *N'* tương ứng của chúng qua $T_{\vec{v}}$. Khi đó *d'* là đường thẳng *M'N'*

Bài 2.6.

Trong mặt phẳng O*xy*, cho đường tròn (*C*) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm ảnh của (*C*) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-2;3)$.

HD ✍Giải

Cách 1.

Phương trình đường tròn (*C*) có tâm *I*(1; -2), bán kính *R* = 3. Gọi $I'=T_{\vec{v}}(I)=(-1;1)$ và (*C'*) là ảnh của (*C*) qua $T_{\vec{v}}$ thì (*C'*) là đường tròn tâm *I'*, bàn kính *R* = 3. Do đó (*C'*): $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Cách 2.

Gọi *I*(x; y) là tâm của đường tròn (*C*) và $I'=T_{\vec{v}}(I)=(x';y')$. Khi đó biểu thức toạ độ của $T_{\vec{v}}$ là

$\begin{cases}x'=x-2\\y'=y+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'+2\\y=y'-3\end{cases}$ thay vào (*C*), ta được

$(x'+2)^2+(y'-3)^2-2(x'+2)+4(y'-3)-4=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Vậy (*C'*): $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

Bài 2.7.

Trong mặt phẳng toạ độ O*xy*, cho điểm *A*(-3;3), *B*(1;3) và đường tròn (*C*) có tâm *I*(3;1), bán kính *R* = 1. Đường thẳng *d*: *x* + *y* – 1 = 0. Tìm trên *d* một điểm *M* và trên (*C*) điểm *M'* sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$.

HD ✍Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;0)$, $T_{\overrightarrow{AB}}: M(x,y)\to M'(x',y')$, nên ta có biểu thức toạ độ theo $T_{\overrightarrow{AB}}$:

$\begin{cases}x'=x+4\\y'=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'-4\\y=y'\end{cases}$. $T_{\overrightarrow{AB}}: d\to d'$, phương trình đường thẳng *d'*: *x* + *y* – 5 = 0.

Ta có $M\in d\Rightarrow M'\in d'$ và $M'\in(C)$, nên toạ độ của điểm *M'* là nghiệm của hệ phương trình :

$\begin{cases}x+y-5=0\\(x-3)^2+(y-1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,y=2\\x=4,y=1\end{array}\right.$

Vậy M_1'(3, 2) thì M_1(-1,2) và M_2'(4,1) thì M_2(0,1).

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.8.Trong mặt phẳng toạ độ O*xy*, cho điểm *A*(-3, 3) và *B*(-1, 6).

a) Tìm toạ độ điểm *M'* là ảnh của *M*(4, -5) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$;

b) Xác định phương trình của đường thẳng *d'* là ảnh của đường thẳng *d*: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$;

c) Xác định phương trình đường tròn (*C'*) là ảnh của đường tròn (*C*): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Bài 2.9. Trong mặt phẳng O*xy*, cho vectơ $\vec{u}(-1;2)$, hai điểm *A*(3;5), *B*(-1;1) và đường thẳng *d* có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ của các điểm *A', B'* theo thứ tự là ảnh của *A, B* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$;

b) Tìm toạ độ điểm *C* sao cho *A* là ảnh của *C* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$;

c) Tìm phương trình của đường thẳng *d'* là ảnh của *d* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

Bài 2.10. Cho đoạn thẳng *AB* và đường tròn (*C*) tâm O, bán kính *R* nằm về một phía đối với đường thẳng *AB*. Lấy điểm *M* trên (*C*), rồi dựng hình bình hành *ABMM'*. Tìm tập hợp các điểm *M'* khi *M* di động trên (*C*)

Bài 2.11. Cho hình bình hành *ABCD*. Dựng ảnh của tam giác *ABC* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Bài 2.12. Cho tam giác *ABC* có *G* là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác *ABC* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$. Xác định điểm *D* sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ biến *D* thành *A*.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Phép đối xứng qua đường thẳng *d* là phép biến hình biến mỗi điểm *M* thành điểm *M’* đối xứng với *M* qua *d*.

- Kí hiệu: $Đ_d$ (Đường thẳng *d* gọi là trục đối xứng)
- Nếu $M \in d$ thì $Đ_d(M) = M' \equiv M$
- Nếu $M' \notin d$ thì *d* là đường trung trực của đoạn *MM’*. Như vậy $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu của *M* trên *d*
- $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow M = Đ_d(M')$

2. Trục đối xứng của một hình

Đường thẳng *d* gọi là trục đối xứng của hình *H* nều $Đ_d$ biến *H* thành chính nó. Khi đó *H* được gọi là hình có trục đối xứng.

3. Biểu thức toạ độ

Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ vuông góc O*xy*, với mỗi điểm *M(x; y).*
Gọi $M' = Đ_d(M) = (x'; y')$

- Nếu chọn *d* là trục O*x* nghĩa là $Đ_{Ox}(M) = M'$ khi đó ta có: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$
- Nếu chọn *d* là trục O*y* nghĩa $Đ_{Oy}(M) = M'$ khi đó ta có: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$
- Nếu chọn *d* là đường thẳng có phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 \neq 0$.

$Đ_d(M) = M'$, khi đó ta có $\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \end{cases}$

4. Tính chất

Phép đối xứng trục

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Trong mặt phẳng O*xy*, cho hai điểm *A*(1;-2) và *B*(3;1). Tìm ảnh của *A*, *B* và đường thẳng *AB* qua phép đối xứng trục O*x*.

HD Giải

Gọi *A’*, *B’* lần lượt là ảnh của *A*, *B* qua phép đối xứng trục O*x*, ta có biểu thức toạ độ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Do đó $Đ_{Ox}(A) = A'(1;2)$, $Đ_{Ox}(B) = B'(3;-1)$ và $Đ_{Ox}(AB) = A'B'$: $3x + 2y - 7 = 0$.

Bài 3.2. Trong mặt phẳng O*xy*, cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng *d’* là ảnh của *d* qua phép đối xứng trục O*y*.

HD Giải

Cách 1. Lấy điểm bất kì $M(x;y) \in d$. Gọi $M' = Đ_d(M) = (x'; y')$. Khi đó $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$

Ta có $M \in d \Leftrightarrow -3x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow M'$ thuộc đường thẳng *d'* có phương trình $3x' + y' - 2 = 0$.

Vậy *d'*: $3x + y - 2 = 0$.

Cách 2.

Lấy hai điểm $A(0;2)$ và $B(-1;-1)$ thuộc *d*. Gọi $A' = Đ_d(A) = (0;2)$ và $B' = Đ_d(B) = (1;-1)$

Khi đó $d' = Đ_{Oy}(d)$ thì *d'* qua hai điểm *A'* và *B'*.

Vậy *d'*: $3x + y - 2 = 0$.

Bài 3.3. Trong mặt phẳng O*xy*, cho điểm $M(1;5)$, đường thẳng *d* có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ và đường tròn (*C*): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

a) Tìm ảnh của *M, d* và (*C*) qua phép đối xứng trục O*x*.

b) Tìm ảnh của *M* qua phép đối xứng trục *d*.

HD Giải

a) Gọi *M'*, *d'* và (*C'*) theo thứ tự là ảnh của *M, d* và (*C*) qua phép đối xứng trục O*x*.
Khi đó $M'(1;-5)$. *d'*: $x + 2y + 4 = 0$
Đường tròn (*C*) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 3$. Gọi $I' = Đ_{Ox}(I) = (1;2)$. Do đó (*C'*) là đường tròn có tâm *I'* và bán kính bằng 3. Vậy (*C'*): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

b) ***Cách 1.*** Ta có $M \notin d$. Gọi $M'' = Đ_d(M) = (x'; y')$

Biểu thức toạ độ đối xứng qua trục *d*: $\begin{cases} x' = x - \dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \\ y' = y - \dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 - \dfrac{2.1(1-2.5+4)}{1^2+(-2)^2} = 3 \\ y' = 5 - \dfrac{2.(-2)(1-2.5+4)}{1^2+(-2)^2} = 1 \end{cases}$.

Vậy $M''(3;1)$

Cách 2. (Vận dụng ND ĐN)

Ta có $M \notin d$. Gọi d_1 là đường thẳng qua *M* và vuông góc với *d*. Vậy d_1: $2x + y - 7 = 0$

Gọi giao điểm của *d* và d_1 là M_0 có toạ độ thoả mãn hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy $M_0(2;3)$. Gọi $M'' = Đ_d(M) = (x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M''} = -\overrightarrow{M_0M}$. Từ đó suy ra $M''(3; 1)$

Bài 3.4. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc O*xy* cho đường thẳng *d*: $2x - y - 3 = 0$.

a) Tìm ảnh điểm *M'* của điểm $M(4; -1)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

b) Viết phương trình đường thẳng d_1' là ảnh của d_1: $x - 3y + 11 = 0$ qua phép $Đ_d$.

c) Viết phương trình (*C'*) là ảnh của đường tròn (*C*): $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 27 = 0$ qua phép $Đ_d$.

HD Giải

Biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục $Đ_d$:

$$\begin{cases} x' = x - \dfrac{4(2x-y-3)}{5} \\ y' = y + \dfrac{2(2x-y-3)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{12}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

a) $Đ_d$:$M(4; -1) \rightarrow M'(x'; y')$. Suy ra $M'\left(-\dfrac{4}{5}; \dfrac{7}{5}\right)$

b) Lấy điểm tuỳ ý $M(x;y) \in d_1$. $Đ_d$: $M(x;y) \in d_1 \rightarrow M'(x';y') \in d_1'$ và ngược, nên ta có

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{12}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y' + \dfrac{12}{5} \\ y = \dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' - \dfrac{6}{5} \end{cases}$$

Thay vào d_1 ta có được phương trình đường d_1': $3x + y - 17 = 0$.

c) Phương trình đường tròn (*C*) có tâm $I(5; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$. Do đó $Đ_d$: $I(5; 2) \rightarrow I'(1; 4)$

Khi đó $Đ_d$: $(C) \rightarrow (C')$ có tâm *I'* và bán kính $R = \sqrt{2}$

Vậy (*C'*): $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$

Bài 3.5. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc O*xy* cho điểm *M*(3; -5), đường thẳng $\Delta: 3x - 2y - 6 = 0$ và đường tròn (*C*): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của *M*, đường thẳng Δ và đường tròn (*C*) qua phép đối xứng trục *d*:
a) *d* là trục hoành
b) *d* là trục tung
c) *d* là đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

HD Giải

a) Khi *d* là trục hoành, nên biểu thức toạ độ của $Đ_d$: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

$Đ_d : M \to M'$ nên *M'*(3; 5)
$Đ_d$: $\Delta \to \Delta'$ nên có phương trình: $3x + 2y - 6 = 0$
$Đ_d$: $(C) \to (C')$ nên có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

b) Khi *d* là trục tung, nên biểu thức toạ độ của $Đ_d$: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

$Đ_d : M \to M'$ nên *M'*(-3; -5)
$Đ_d$: $\Delta \to \Delta'$ nên có phương trình: $3x + 2y + 6 = 0$
$Đ_d$: $(C) \to (C')$ nên có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$.

c) Khi *d* là đường thẳng $x - y + 1 = 0$ nên có biểu thức toạ độ của $Đ_d$: $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

$Đ_d : M \to M'$ nên *M'*(-6; 4)
$Đ_d$: $\Delta \to \Delta'$ nên có phương trình: $2x - 3y + 11 = 0$
Đường tròn (C) có tâm *I*(1; -2) và bán kính *R* = 3. Do đó $Đ_d : I \to I'$ nên *I'*(-3; 2)
$Đ_d$: $(C) \to (C')$ có tậm *I'* và bán kính bằng 3.Vậy (*C'*): $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$.

Bài 3.6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc O*xy* cho hai đường thẳng d_1: $x - 5y + 7 = 0$ và d_2: $5x - y - 13 = 0$. Tìm phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2.

HD Giải

Phương trình đường thẳng d_1: $x - 5y + 7 = 0$ và d_2: $5x - y - 13 = 0$. Suy ra d_1 và d_2 cắt nhau nên phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2 có trục là đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2.
Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và d_2 là:

$$\frac{|x-5y+7|}{\sqrt{1+25}} = \frac{|5x-y-13|}{\sqrt{25+1}} \Leftrightarrow \frac{x-5y+7}{\sqrt{26}} = \pm\frac{5x-y-13}{\sqrt{26}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right.$$

Khi *d* có phương trình $x + y - 5 = 0$ ta có biểu thức toạ độ $Đ_d$: $\begin{cases} x' = -y + 5 \\ y' = -x + 5 \end{cases}$

Khi *d* có phương trình $x - y - 1 = 0$ ta có biểu thức toạ độ $Đ_d$: $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}$

Bài 3.8. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc O*xy* cho hai đường thẳng d_1: $x + 3y - 6 = 0$ và d_2: $3x + y + 2 = 0$. Tìm phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2.

HD Giải

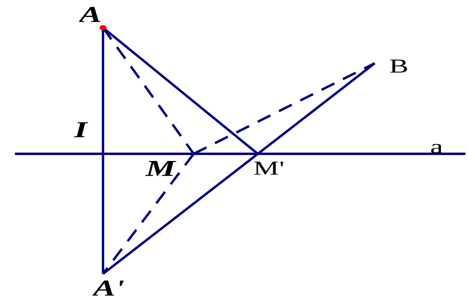
Trục đối xứng biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2 là trục *d*: Đường phân giác của góc tạo bởi d_1 và

$$d_2: \frac{|x+3y-6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|3x+y+2|}{\sqrt{9+1}} \Leftrightarrow \frac{x+3y-6}{\sqrt{10}} = \pm\frac{3x+y+2}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y+4=0 \\ x+y-1=0 \end{array}\right.$$

Bài 3.9. Cho đường thẳng *a* và hai điểm *A*, *B*. Hãy tìm điểm $M \in a$ sao cho: *MA* + *MB* đạt giá trị nhỏ nhất khi *A* và *B* nằm cùng một phía đối với *a*.

HD Giải

Gọi *A'* là ảnh của *A* qua phép đối xứng trục $Đ_a$. *M* là điểm bất kì thuộc *a* ta có:
$MA' = MA \Rightarrow MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ Do đó *MA* + *MB* đạt giá trị nhỏ nhất khi bằng *A'B*
Điều này xảy ra ki và chỉ khi *A'*, *M*, *B* thẳng hàng nghĩa là *M* là giao điểm của *A'B* với *a*.
Vậy: *MA* + *MB* đạt giá trị nhỏ nhất khi *M* trùng với *M'* là giao điểm của *A'B* và đường thẳng *a*.



<u>Bài 3.10</u>. Trong mặt phẳng hệ trụa toạ độ O*xy*, cho hai điểm *A*(1; 2) và *B*(3; 4), Tìm điểm *M* trên trục hoành sao cho *MA* + *MB* bé nhất.

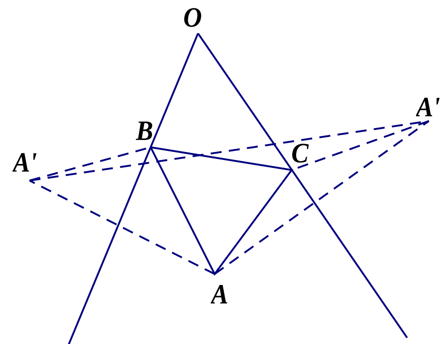
<u>HD Giải</u>

Ta có $y_A.y_B > 0$ nên *A*, *B* nằm cùng phía đối với O*x*.
Gọi *A'* là ảnh của *A* qua phép đối xứng trục O*x* và *M*(*x*; 0). Suy ra *A'*(1; -2)
Ta có *MA* + *MB* = *MA'* + *MB* $\geq A'B$
Vậy (*MA* + *MB*) nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ (*MA'* + *MB*) nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA' + MB = A'B$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *A'*, *M*, *B* thẳng hàng. (1)
Ta lại có: $\overrightarrow{A'B} = (2;6), \overrightarrow{A'M} = (x-1;2)$
Do (1) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A'B}$ cùng phương $\overrightarrow{A'M} \Leftrightarrow 2.2 - 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$. Vậy $M\left(\dfrac{5}{3};0\right)$

<u>Bài 3.11</u>. Cho góc nhọn *x*O*y* và một điểm *A* nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm *B* trên O*x* và điểm *C* trên O*y* sao cho tam giác *ABC* có chu vi nhỏ nhất.

<u>HD Giải</u>

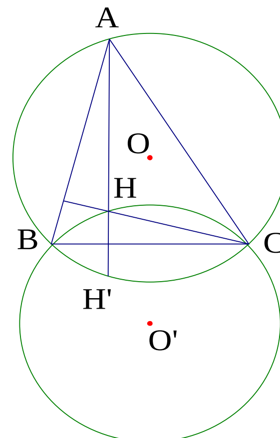
Xét tam giác bất kì *ABC* có *B* và *C* lần lượt nằm trên hai tia O*x* và O*y*. Gọi *A'* và *A''*là các điểm đối xứng của *A* qua các đường thẳng O*x*, O*y*. Gọi 2p là chu vi của tam giác *ABC*
Ta có
$2p = AB + BC + CA = A'B + BC + CA'' \geq A'A''$.
Dấu bằng xảy ra khi bốn điểm *A'*, *B*, *C*, *A*" thẳng hàng.
Suy ra chu vi của tam giác *ABC* bé nhất phải lấy *B* và *C* lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng *A'A*" với hai tia O*x*, O*y*.(các giao điểm này tồn được vì góc *x*O*y* nhọn)



<u>Bài 3.12.</u>
Cho hai điểm *B* và *C* cố định trên đường tròn (*O*) tâm *O*, điểm *A* di động trên đường tròn (*O*). Chứng minh rằng khi *A* di động trên đường tròn (*O*) thì trực tâm của tam giác *ABC* di động trên một đường tròn.

<u>HD Giải</u>

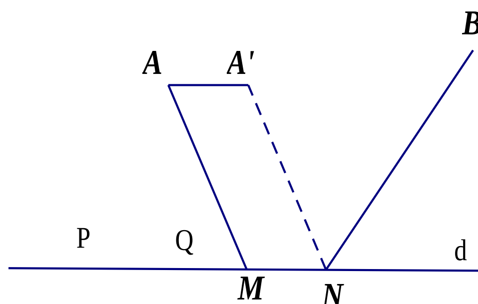
Gọi I, H' theo thứ tự là giao của tia AH với BC và đường tròn (O). Ta có
$\widehat{BAH} = \widehat{HCB}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)
$\widehat{BAH} = \widehat{BCH'}$ (cùng chắn một cung)
Vậy tam giác CHH' cân tại C, suy ra H đối xứng với H' qua đường thẳng BC.
Khi A chạy trên đường tròn (O) thì H' cũng chạy trên đường tròn (O). Do đó H phải chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng qua đường thẳng BC.



Bài 3.13.
Cho đường thẳng *d* qua hai điểm phân biệt *P*, *Q* và hai điểm *A*, *B* nằm cùng phía đối với *d*. Hãy xác định trên d hai điểm *M* và *N* sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và *AM* + *BN* bé nhất.

HD Giải

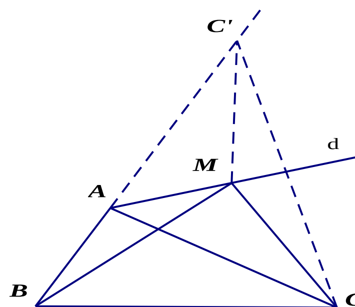
Giả sử hai điểm M và N nằm trên d sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$. Lấy điểm *A'* sao cho $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{PQ}$ thì *A'* hoàn toàn xác định và *AMNA'* là hình bình hành nên *AM = A'N*
Vậy *AM + BN = A'N + AN*, như thế bài toán trở về bài 3.9.
Khi điểm N xác định được thì điểm *M* cũng xác định được với điều kiện $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$



Bài 3.14. Cho tam giác *ABC*. Gọi *d* là đường phân giác ngoài tại đỉnh *A* của tam giác *ABC* và *M* là một điểm bất kì thuộc *d*. Chứng minh rằng tam giác *MBC* có chu vi không nhỏ hơn chu vi tam giác *ABC*.

HD Giải

Gọi *C'* là ảnh của C đối xứng qua trục *d*. Khi đó hiển nhiên *A* nằm giữa *B* và *C'*.
Với mọi $M \in d$, ta có *MC = MC'* và
$MB + MC = MB + MC' \geq BC'$
Mà $BC' = AB + AC' = AB + AC$
Vậy $MB + MC + BC \geq AB + AC + BC$. Điều này chứng tỏ rằng, tam giác *ABC* có chu vi nhỏ nhất.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.15. Trong mặt phẳng O*xy*, cho các đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình:
(C_1): $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$; ($C_2$): $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$. Viết phương trình ảnh của mỗi đường tròn trên qua phép đối xứng trục O*y*.

Bài 2.16. Cho hai đường thẳng *c*, *d* và hai điểm *A*, *B* không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng điểm *C* trên *c*, điểm *D* trên *d* sao cho tứ giác *ABCD* là hình thang cân nhận *AB* là một cạnh đáy (không cần biện luận)

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

- Cho điểm *I*. Phép biến hình biến điểm *I* thành chính nó, biến mỗi điểm *M* khác *I* thành *M’* sao cho *I* là trung điểm của *MM’* được gọi là phép đối xứng tâm *I*.
- Kí hiệu : $Đ_I$
- Từ định nghĩa suy ra: $Đ_I$(M) = M’ $\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$
- Từ đó suy ra:
  - Nếu $M \equiv I$ thì $M' \equiv I$
  - Nếu *M* không trùng với *I* thì $Đ_I(M) = M'$ ⇔ *I* là trung điểm của *MM’*
  - $Đ_I(M) = M' \Leftrightarrow Đ_I(M') = M$

2. Tâm đối xứng của một hình

Điểm *I* được gọi là tâm đối xứng của hình *H* nếu phép đối xứng tâm *I* biến hình *H* thành chính nó. Khi đó *H* được gọi là hình có tâm đối xứng.

3. Biểu thức toạ độ

Trong mặt phẳng O*xy*, Cho điểm *I* = (*a; b*). Gọi *M* = (*x;y*) và *M’*= $Đ_I(M)$ = (*x’; y’*)

Trường hợp 1: Khi tâm đối xứng *I* trùng với gốc toạ độ *O*(0; 0)

$Đ_O : M(x,y) \to M'(x',y')$ khi đó : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

Trường hợp 2: Khi tâm đối xứng $I\left(a,b\right)$

$Đ_I : M(x,y) \to M'(x',y')$ khi đó : $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

4. Các tính chất

Phép đối xứng tâm

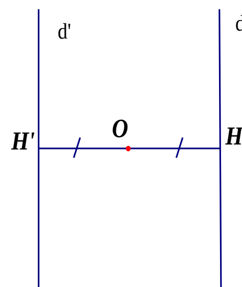
- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho;
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho;
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho;
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

B. BÀI TẬP

Bài 4.1. Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d’. Chứng minh
a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d’ song song với d, O cách đều d và d’
b) Hai đường thẳng d và d’ trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

HD Giải

a) Kẻ $OH \perp d$ $(H \in d)$ thì vì d không đi qua O nên H không trùng với O. Phép $Đ_O$(H) = H’ thì O là trung điểm của HH’ và biến đường thẳng d thành đường thẳng d’ vuông góc với OH’ tại H’. Suy ra d và d’ song song, cách đều điểm O.



b) Nếu d không qua O thì theo câu a), d’ // d nên d’ không trùng d. Nếu d đi qua O thì mọi điểm $M \in d$ biến thành $M' \in d$. Vậy d’ trùng với d.

Bài 4.2. Chỉ ra tâm đối xứng của các hình sau dây:
a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau

b) Hình gồm hai đường thẳng song song
c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau
d) Đường elip
e) Đường hypebol

HD Giải

a) Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng.
b) Tâm đối xứng là những điểm cách đều hai đường thẳng
c) Tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm đường tròn
d) Tâm đối xứng là trung điểm nối hai tiêu điểm của elip.
e) Tâm đối xứng là trung điểm nối hai tiêu điểm của hypebol.

Bài 4.3. Trong mặt phẳng O*xy*, cho điểm *A*(-1; 3) và đường thẳng *d* có phương trình $x – 2y + 3 =0$. Tìm ảnh của *A* và *d* qua phép đối xứng tâm O.

HD Giải

Gọi *A*' = $Đ_O(A) = (x'; y')$. Theo biểu thức toạ độ, ta có $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$. Vậy *A*'(1; -3)

Gọi d' = $Đ_O$(d)

Cách 1. Lấy một điểm tuỳ ý $M(x; y) \in d$. Khi đó ta có *M*' = $Đ_O(M) = (x'; y')$, nên thay $x = - x'$, $y = - y'$ vào phương trình của *d*. Ta có ảnh của *d* qua phép đối xứng tâm O là *d'*: $x – 2y – 3 = 0$.

Cách 2. Lấy điểm $B(-3;0) \in d$. Khi đó *B*' = $Đ_O(B)$ = (3;0) thuộc *d'*

d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm O nên d' song song hoặc trùng với d. Do đó d': x – 2y + c = 0

$B' \in d'$ suy ra c = - 3. Vậy d': x – 2y – 3 = 0.

Cách 3. Lấy hai điểm phân biệt *M*, *N* thuộc *d* và xác định ảnh của nó qua phép đối xứng tâm O, khi đó đường thẳng *d'* qua hai điểm *M*' và *N*'.

Bài 4.4. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc O*xy*, cho hai điểm *I*(1; 2), *M*(-2; 3), đường thẳng *d* có phương trình $3x – y + 9 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x – 6y + 6 = 0$. Hãy xác định toạ độ điểm *M*', phương trình đường thẳng d' và đường tròn (C') theo thứ tự là ảnh của *M*, *d*, (C) qua:
a) Phép đối xứng qua gốc toạ độ
b) Phép đối xứng qua tâm I

HD Giải

a) Gọi *M*', *d*', (C') theo thứ tự là ảnh của *M*, *d* và (C) qua phép đối xứng qua O. Dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ O ta có:
M'(2; -3), phương trình của *d*': $3x – y – 9 = 0$, phương trình đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$
b) Gọi *M*', *d*', (C') theo thứ tự là ảnh của *M*, *d* và (C) qua phép đối xứng tâm *I*. Dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua tâm *I* ta có: *M*'(4; 1)
Vì *d*' song song với *d* nên d': $3x – y + c = 0$, lấy điểm *N*(0; 9) thuộc *d*. Khi đó ảnh của *N* qua phép đối xứng tâm *I* là *N*'(2; -5) thuộc *d*'. Từ đó suy ra $c = -11$
Vậy d': $3x – y – 11 = 0$.
Đường tròn (C) có tâm *J*(-1; 3) và bán kính R = 2. Ảnh *J* qua phép đối xứng tâm *I* là *J*'(3; 1). Vậy phương trình (C'): $(x – 3)^2 + (y – 1)^2 = 4$

Bài 4.5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình x – 2y + 2 = 0 và d' có phương trình x – 2y – 8 = 0. Tìm phép đối xứng tâm biến d thành d' và biến trục Ox thành chính nó.

HD Giải

Giao điểm của d và d' với Ox là A(-2; 0) và A'(8; 0). Gọi I(a; b) là tâm của phép đối xứng

Ta có $Đ_I : A(x, y) \to A'(x', y')$ khi đó : $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 2a + 2 \\ 0 = 2b + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$

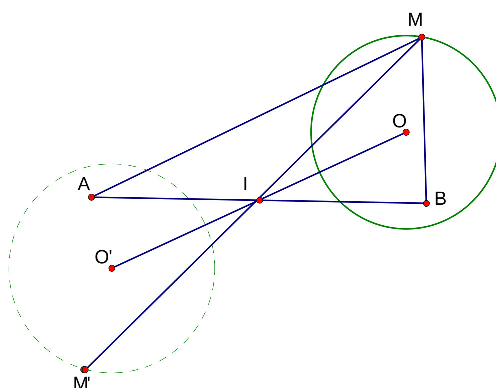
Vậy phép đối xứng qua tâm I(3; 0) là phép cần tìm.

Bài 4.6. Cho đường tròn (O,R) và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi M chạy trên (O,R).

HD Giải

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

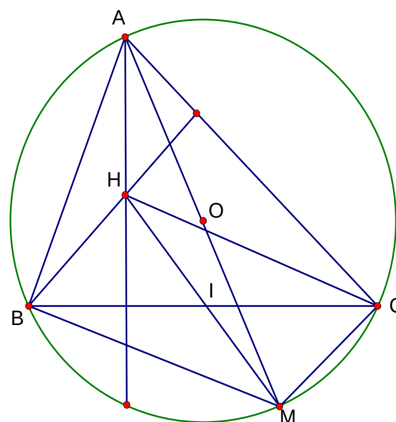
Bởi vậy, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$ nghĩa là I là trung điểm của MM' hay $Đ_I(M) = M'$
Vậy khi M chạy trên đường tròn (O,R) thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$
Nếu ta gọi O' điểm đối cứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn (O',R).



Bài 4.7. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O, R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

HD Giải

Ta vẽ đường kính AM của đường tròn. Khi đó BH // MC (vì cùng vuông góc với AC), và CH // BM (vì cùng vuông góc với AB) hay BHCM là hình bình hành
Nếu gọi I là trung điểm của BC thì I cũng là trung điểm của MH.
Vậy phép đối xứng qua điểm I biến M thành H
Khi A chạy trên (O, R) thì M chạy trên đường tròn (O; R). Do đó, H nằm trên đường tròn là ảnh của đường tròn (O, R) qua phép đối xứng tâm I.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 4.8. Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục gíc đều, hình nào có tâm đối xứng ?
Bài 4.9. Tìm một hình có vô số tâm đối xứng
Bài 4.10. Cho tứ giác ABCD. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm D.
Bài 4.11. Chứng minh rằng trong phép đối xứng tâm I nếu điểm M biến thành chính nó thì M phải trùng với I.
Bài 4.12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm I(2; -3) và đường thẳng d có phương trình 3x + 2y – 1 = 0. Tìm toạ độ điểm I' và phương trình của đường thẳng d' lần lượt là ảnh của I và đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O.
Bài 4.13. Cho đường tròn (O;R), đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên (O;R) và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

§5. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

- Trong mặt cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM = OM' và góc lượng $(OM, OM') = \varphi$ được gọi là phép quay tâm O góc quay φ.
- Điểm O gọi là tâm quay, φ gọi là góc quay.
- Kí hiệu: $Q_{(O,\varphi)}$ hoặc Q_0^{φ}
- Chiều dương của phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ theo chiều dương của đường tròn lượng giác. Ngược lại là chiều âm và còn kí hiệu $Q_{(O,-\varphi)}$

Nhận xét:

- Phép quay tâm O, góc quay $\varphi = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ chính là phép đối xứng tâm O
- Phép quay tâm O, góc quay $\varphi = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, chính là phép đồng nhất.

2. Tính chất

Phép quay

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho;
- Biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho;
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính;

Chú ý: Giả sử phép quay tâm I góc quay φ biến đường thẳng d thành d'. Khi đó:

- Nếu $0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng φ
- Nếu $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \varphi$

3. Biểu thức toạ độ của phép quay.

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, xét phép quay $Q_{(I,\varphi)}$

Trường hợp 1: Khi tâm quay I trùng với gốc toạ độ O:

$Q_{(O,\varphi)} : M(x,y) \to M'(x',y')$ khi đó : $\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

Trường hợp 2: Khi tâm quay $I\left(x_0, y_0\right)$

$Q_{(I,\varphi)} : M(x,y) \to M'(x',y')$ khi đó : $\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases}$

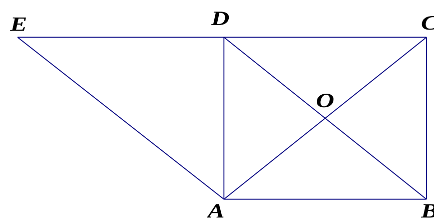
B. BÀI TẬP

Bài 5.1. Cho hình vuông ABCD tâm O.
a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90^0.
b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^0.

HD Giải

a) Gọi E là điểm đối xứng với C qua tâm D.
Khi đó $Q_{\left(A,90^0\right)}(C) = E$

b) $Q_{\left(O,90^0\right)}(B) = C, Q_{\left(O,90^0\right)}(C) = D$. Vậy ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^0 là đường thẳng CD.



Bài 5.2. Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.

HD Giải

Ảnh của đường thẳng d qua phép quay $Q_{(O,\varphi)}$ có thể dựng như sau:

Cách 1. Lấy hai điểm A, B phân biệt trên d, rồi dựng ảnh A', B' của chúng. Đường thẳng d' là đường thẳng đi qua A' và B'.

Cách 2. Trong trường hợp d không đi qua O. gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, dựng H' là ảnh của H. Đường thẳng vuông góc với OH' tại H' chính là ảnh d' của d.

Từ cách dựng trên, ta suy ra: Phép quay với góc quay $\pm\frac{\pi}{2}$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' vuông góc với d.

Bài 5.3. Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O, góc quay 90^0.

HD Giải

Xét phép quay $Q_{(O,90^0)}: A \to D, M \to M' \Rightarrow Q_{(O,90^0)}: N \to N'$. N là trung điểm của OA thì N' là trung điểm của OD. Suy ra: $Q_{(O,90^0)}: \Delta AMN \to \Delta DM'N'$ và $\Delta AMN = \Delta DM'N'$

Bài 5.4. Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đường thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tâm giác vuông cân.

HD Giải

Gọi Q là phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{2}$ (bằng góc lượng giác (OA,OB)).

Khi đó $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(A) = B, Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(A') = B'$. Do đó $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(OAA') = OBB'$.

Bởi vậy, $Q_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}(G) = G'$. Suy ra OG = OG' và $\widehat{GOG'} = \frac{\pi}{2}$

Vậy GOG' là tam giác vuông cân tại đỉnh O.

Bài 5.5. Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C, điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Dựng về một phía của đường thẳng AC các tam giác đều ABE và BCF.

a) Chứng minh rằng AF = EC và góc giữa hai đường thẳng AF và EC bằng 60^0

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và EC. Chứng minh tam giác BMN đều.

HD Giải

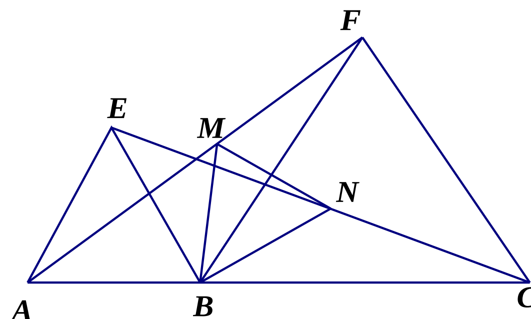
a) Xét phép quay $Q_{(B,60^0)}$, khi đó :

$Q_{(B,60^0)}: E \to A, C \to F$

$\Rightarrow Q_{(O,60^0)}: EC \to AF$. Suy ra EC = AF và (EC,AF) = 60^0.

b) Ta có $Q_{(B,60^0)}: N \to M$, N là trung điểm của EC và M là trung điểm của AF.

Nên BN = BM và $\widehat{NBM} = 60^0$. Do đó BMN là tam giác đều.

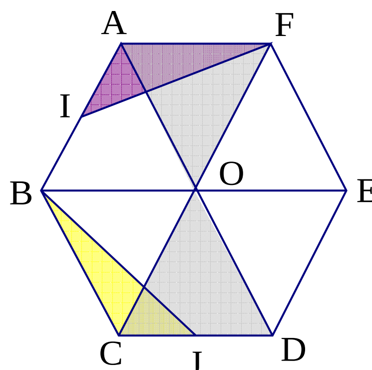


Bài 5.6. Cho lục giác đều ABCDEF, O là tâm đối xứng của nó, I là trung điểm của AB.
a) Tìm ảnh của tam giác AIF qua phép quay tâm O góc 120^0
b) Tìm ảnh của tam giác AOF qua phép quay tâm E góc 60^0

HD Giải

a)
$Q_{(O,120^0)}: F \to B, A \to C, B \to D \Rightarrow Q_{(O,120^0)}: I \to J$
với J là trung điểm của CD.
Vậy $Q_{(O,120^0)}: \Delta AIF \to \Delta CJB$

b) Phép quay tâm E góc 60^0 biến A, O, F lần lượt thành C, D, O. Vậy $Q_{(E,60^0)}: \Delta AOF \to \Delta CDO$



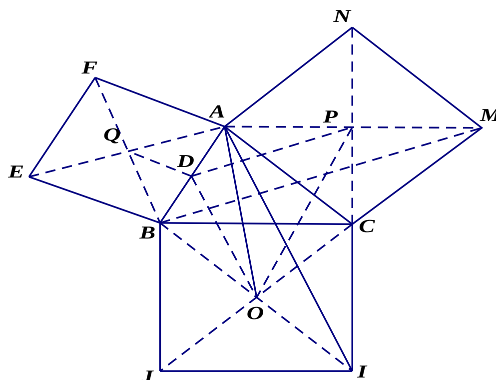
Bài 5.7. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm đối xứng của chúng.
a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng DOP là tam giác vuông cân đỉnh D
b) Chứng minh AO vuông góc với PQ và AO = PQ.

HD Giải

a) Xét phép quay $Q_{(C,90^0)}: M \to A, B \to I$. Do đó MB bằng và vuông góc với AI

Trong tam giác ABM, có DP song song và bằng nửa BM và trong tam giác BAI có DO song song và bằng nửa AI. Từ đó suy ra DP bằng và vuông góc với DO. Hay tam giác DOP vuông cân tại D.

b) Xét phép quay $Q_{(D,90^0)}: O \to P, A \to Q$. Do đó OA bằng và vuông góc với PQ.



Bài 5.8. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam của tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M và J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC và CF. Chứng minh rằng tam giác IJM là tam giác vuông cân.

HD Giải

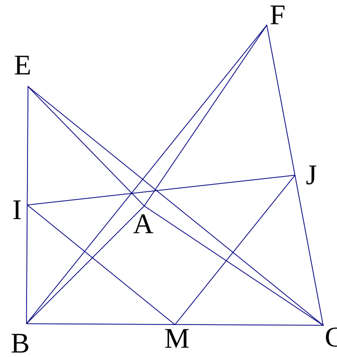
Xét phép quay tam A góc quay 90^0.

$Q_{(A,90^0)}: E \to B, C \to F$. Từ đó suy EC = BF và $EC \perp BF$

Vì IM là trung bình của tam giác BEC nên IM // EC và $IM = \frac{1}{2}EC$

Tương tự, ta có MJ // BF và $MJ = \frac{1}{2}BF$. Từ đó suy ra IM = MJ và $IM \perp MJ$

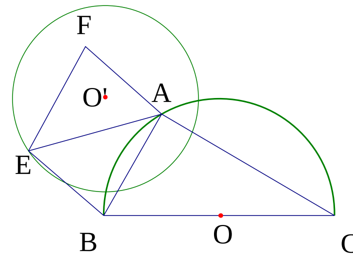
Vậy tam giác IMJ là tam giác vuông cân tại M.



Bài 5.9. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông ABEF. Chứng minh rằng E chạy trên một nửa đường tròn cố định.

HD Giải

Xét phép quay tâm B góc quay 90^0. Khi đó $Q_{(B,90^0)}(A) = E$. Khi A chạy trên nửa đường tròn (O), E chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép quay tâm B, góc quay 90^0.



Bài 5.10. Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài của tam giác đó các hình vuông ABEF và ACIK. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với FK và $AM = \frac{1}{2}FK$.

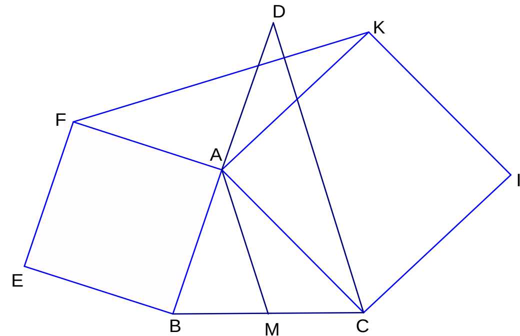
HD Giải

Gọi D là ảnh của B qua phép đối xứng tâm A. Khi đó AD = AB = AF và $AD \perp AF$

Xét $Q_{(A,90^0)}: D \to F, C \to K$. Do đó DC = FK và $DC \perp FK$

Vì AM là đường trung bình của tam giác BCD nên AM // CD và $AM = \frac{1}{2}CD$

Vậy AM vuông góc với FK và $AM = \frac{1}{2}FK$



Bài 5.11.

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{4}$.

Tìm ảnh qua phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$ của:

a) Điểm A(2, 2) b) Đường tròn (C): $(x-1)^2 + y^2 = 4$

HD Giải

Biểu thức toạ độ của phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: M(x,y) \to M'(x',y')$ là:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

a) $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: A(2,2) \to A'(x',y')$ thì $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-2) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 2\sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $A\left(0, 2\sqrt{2}\right)$

b) Đường tròn (C) có tâm I(1, 0) và bán kính R = 2.

$$Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: I(1,0) \to I'(x',y'); Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: (C) \to (C')$$

với (C') là đường tròn tâm $I'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và có bàn kính R' = 2. Vậy (C'): $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

Bài 5.12.
Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$.

a) Viết biểu thức toạ độ của phép quay đó.
b) Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$ qua phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$.

c) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d: x + y – 2 = 0 qua phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$

HD Giải

a) Biểu thức toạ độ của phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: M(x,y) \to M'(x',y')$ là:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

b) đường tròn (C) có tâm I(3, -3) và bán kính R = 2, nên $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: I(3,-3) \to I'(x',y')$

Do đó $I'\left(3\sqrt{2}, 0\right)$. Vậy: $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}: (C) \to (C')$, với (C') có tâm I' và bán kính R' = 2 là:

Vậy (C'): $\left(x - 3\sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 4$

c) Lấy điểm $M(1;1) \in d$ và $OM \perp d$. Gọi M' là ảnh của M quay phép quay $Q_{\left(O,\frac{\pi}{4}\right)}$ thì $M'\left(0; \sqrt{2}\right)$

Từ đó suy ra d' phải qua M' và vuông góc với OM'.
Vậy phương trình của d': $y = \sqrt{2}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 5.13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(2; 0) và đường thẳng d có phương trình x + y – 2 = 0. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90^0.
Bài 5.14. Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' có chung đỉnh O. Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều.
Bài 5.15. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(2;2) và các đường thẳng d_1: x + y – 2 = 0, d_2: x + y – 8 = 0. Tìm toạ độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa
- Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Nhận xét:
  - Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình
  - Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

2. Tính chất Phép dời hình:
- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B. BÀI TẬP

Bài 6.1. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A(-3;2), B(-4;5) và C(-1;3).
a) Chứng minh rằng các điểm A'(2;3), B'(5;4) và C'(3;1) theo thứ tự là ảnh của A, B và C qua phép quay tâm O góc -90^0.
b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^0 và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

HD Giải

a) Ta có $\overrightarrow{OA}=(-3;2), \overrightarrow{OA'}=(2;3)$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$. Từ đó suy ra góc lượng giác (OA; OA') = -90^0.
Mặt khác ta có $OA = OA' = \sqrt{13}$. Do đó phép quay tâm O góc 90^0 biến A thành A'. Các trường hợp khác tương tự.

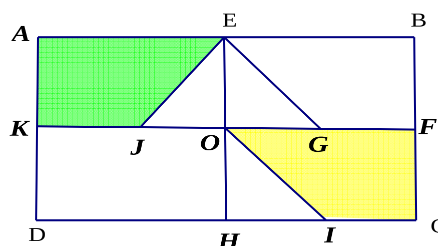
b) Gọi $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác A'B'C' qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $A_1(2; -3)$, $B_1(5; -4)$, $C_1(3; -1)$.

Bài 6.2. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Chứng minh rằng hình thang AEJK và FOIC bằng nhau.

HD Giải

Gọi G là trung điểm OF. Phép đối xứng qua đường thẳng EH biến hình thang AEJK thành hình thang BEGF.

Phép tịnh tiến theo vecto $\overrightarrow{EO}$ biến hình thang FOIC thành hình thang FOIC. Nên hai hình thang AEJK và FOIC bằng nhau.



Bài 6.3. Chứng minh rằng: Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm của tam giác A'B'C'.

HD Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB, BC và G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và A'B'C'.
Gọi phép dời hình đó là F. Ta có F(AB) = A'B', F(BC) = B'C'. Khi đó $F(M)=M'\in A'B', F(N)\in B'C'$
Vậy F biến trung tuyến AM, CN của tam giác ABC tương ứng thành các trung tuyến A'M', C'N' của tam

giác A’B’C’.
Từ đó suy ra F biến trọng tâm G của tam giác ABC thành trọng tâm G’ của tam giác A’B’C’ là giao điểm của A’M’ và C’N’.

Bài 6.4. Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

HD ✍Giải

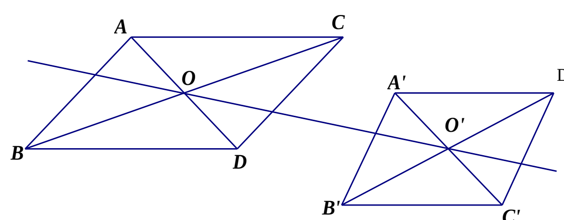
Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A’B’C’D’ có AB = CD = A’B’ = C’D’, AD = BC = A’D’ = B’C’.
Khi đó ABC và A’B’C’ là hai tam giác vuông bằng nhau, do đó có phép dời hình $F:\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$ và F biến trung điểm O của AC thành trung điểm O’ của A’C’. Nhưng vì O và O’ lần lượt là trung điểm của BD và B’D’ nên F cũng biến D thành D’.
Vậy F biến ABCD thành A’B’C’D’, nên theo định nghĩa, hai hình chữ nhật đó bằng nhau.

Bài 6.5. Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

HD ✍Giải

Một đường thẳng đi qua tâm O của hình bình hành thì chia hình bình hành đó thành hai phần bằng nhau, vì phép đối xứng qua tâm O sẽ biến phần này thành phần kia.
Ta xét hai hình bình hành ABCD và A’B’C’D’ lần lượt có tâm O, O’.
Ta có O, O’ lần lượt là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD và A’B’C’D’ nên đường thẳng bất kì qua tâm thì chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Suy ra: Đường thẳng OO’ chia mỗi hình bình hành ABCD và A’B’C’D’ thành hai hình bằng nhau.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 6.6. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ Oxy, cho $\vec{v}(2;0)$ và điểm M (1; 1).

a) Tìm toạ độ điểm M’ là ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

b) Tìm toạ độ điểm M’’ là ảnh của điểm M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng trục Oy.

Bài 6.7. Trong mặt phẳng Oxy, cho vectơ $\vec{v}(3;1)$ và đường thẳng d có phương trình 2x – y = 0. Tìm ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 90^0 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

§7. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho một điểm *O* cố định và một số *k* không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm *M* thành điểm *M'* sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm *O* tỉ số *k*.

Kí hiệu: $V_{(O,k)}$. Như vậy $V_{(O,k)} : M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

Nhận xét

- Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- Khi $k > 0$, *M* và *M'* nằm cùng phìa đối với *O*.
- Khi $k < 0$, *M* và *M'* nằm khác phía đối với *O*.
- Khi $k = -1$, M và M' đối xứng với nhau qua tâm *O* nên $V_{(O,-1)}$ = Đ$_O$
- Khi $k = 1$, thì $M \equiv M'$ nên phép vị tự là phép đồng nhất
- $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{(O,\frac{1}{k})}(M') = M$

2. Các tính chất của phép vị tự

a. Định lí 1. Nếu phép vị tự tỉ số *k* biến hai điểm *M* và *N* lần lượt thành hai điểm *M'* và *N'* thì: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $MN = |k|MN$

b. Phép vị tự tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài nhân lên với $|k|$;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho và tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó;
- Biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|$.R.

3. Biểu thức toạ độ.

Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ Oxy, cho phép vị tự $V_{(I,k)}$ với $I\left(x_0, y_0\right)$

Ta có: $V_{(I,k)} : M(x,y) \to M'(x',y') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

Khi $I \equiv O$ thì $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

B. BÀI TẬP

Bài 7.1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng d có phương trình 2x + y – 4 = 0.
a) Hãy viết phương trình đường thẳng d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k = 3.
b) Hãy viết phương trình đường thẳng d_2 là ảnh của d qua phép vị tự tâm I(-1;2) tỉ số $k = -2$

HD Giải

a) Lấy hai điểm A(0; 4) và B(2; 0) thuộc d. Gọi A', B' theo thứ tự là ảnh của A và B qua phép vị tự tâm O tỉ số k = 3. Khi đó A'(0; 12) và B'(6; 0). d_1 chính là đường thẳng qua hai điểm A' và B' nên có phương trình 2x + y – 12 = 0.

b) Vì d_2 // d: 2x + y – 4 = 0 nên d_2: 2x + y + c = 0. Lấy điểm A(4; 0) thuộc d và gọi $A' = V_{(I,-2)}(A)$.

Khi đó ta có $A'(-3;-2) \in d_2$ nên suy ra c = 8. Vậy d_2: 2x + y + 8 = 0.

Bài 7.2. Trong mặt phẳng Oxy, cho phép vị tự tâm I(1; 3), tỉ số $k = -2$. Tìm ảnh của các đường sau qua phép vị tự $V_{(I,k)}$
a) Đường thẳng d: 2x + y – 1 = 0
b) Đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$

c) Parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$

HD Giải

$V_{(I,k)}: M(x,y) \to M'(x',y')$ có biểu thức toạ độ: $\begin{cases} x' = -2x+3 \\ y' = -2y+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-x'+3}{2} \\ y = \dfrac{-y'+9}{2} \end{cases}$ (*)

a) $V_{(I,k)}: M(x,y) \in d \to M'(x',y') \in d'$. Thay (*) vào phương trình của d, ta có:2x' + y' – 13 = 0

Vậy phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $V_{(I,k)}$ là: 2x + y – 13 = 0.

Cách khác: Lấy điểm $M(0,1) \in d$, $V_{(I,k)}: M(0,1) \in d \to M'(3,7) \in d'$

Vì phép vị tự biến đường thẳng d thành d' song song hoặc trùng với d nên d': 2x + y + c = 0 và $M' \in d$ nên ta có c – 13. Vậy d': 2x + y – 13 = 0.

b) $V_{(I,k)}: M(x,y) \in (C) \to M'(x',y') \in (C')$.

Thay (*) vào phương trình đường tròn (C) ta có: $(x' + 1)^2 + (y' - 11)^2 = 12$

Vậy phương trình đường tròn (C'): $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$

Cách khác: Tâm và bán kính của (C): J(2, - 1), $R = \sqrt{3}$

$V_{(I,k)}: J(x,y) \in (C) \to J'(x',y') \in (C') \Rightarrow J'(-1,11), R' = 2\sqrt{3}$

Vậy phương trình đường tròn (C'): $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$

c) $V_{(I,k)}: M(x,y) \in (P) \to M'(x',y') \in (P')$. Thay (*) vào phương trình (P), ta có : $y' = -\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{19}{2}$

Vậy phương trình (P'): $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{19}{2}$

Bài 7.3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Hãy viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I(1; 2) tỉ số k = - 2.

HD Giải

Đường tròn (C) có tâm J(3; -1) và bán kính R = 3. Gọi $J' = V_{(I,-2)}(J)$ nên J'(-3; 8).

Do vậy đường tròn (C') có tâm là J' và bán kính $R' = |-2|.3 = 6$.

Vậy (C'): $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$

Bài 7.4. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 14 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 2y - 11 = 0$. Xác định phép vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C').

HD Giải

Phương trình đường tròn (C) có tâm và bán kính: $I_1(5, 4)$, $R_1 = 3\sqrt{3}$ và đường tròn (C'): $I_2(0, -1)$, $R_2 = 2\sqrt{3}$.

Xét $V_{(I,k)}: M(x,y) \in (C) \to M'(x',y') \in (C')$ có biểu thức toạ độ là $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$

Trong đó $I(x_0, y_0)$ là tâm vị tự. Ta có $R_2 = |k|R_1 \Rightarrow k = \pm\frac{2}{3}$

- Khi $k = \frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x_0 \\ y' = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y_0 \end{cases}$ và $V_{(I,k)}: I_1(5;4) \in (C) \to I_2(0,1) \in (C')$

Nên ta có: $x_0 = -10, y_0 = -11$. Vậy phép vị tự có I(-10, -11) và $k = \frac{2}{3}$ biến (C) thành (C').

- Khi $k=-\frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x'=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}x_0 \\ y'=\frac{2}{-3}y+\frac{5}{3}y_0 \end{cases}$ và $V_{(I,k)}$ $V_{(I,k)}: I_1(5;4)\in(C)\to I_2(0,1)\in(C')$

Nên ta có: $x_0=2, y_0=1$. Vậy phép vị tự $V_{(I,k)}$ có I(2, 1) và $k=-\frac{2}{3}$ biến (C) thành (C').

Bài 7.5. Trong mặt phẳng hệ trục toạ độ Oxy, cho hai đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-3)^2=1$ và (C'): $(x-3)^2+(y-4)^2=4$.
Xác định phép vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C').

HD Giải

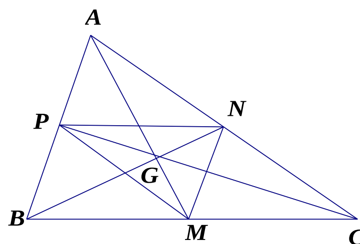
Phép vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') là:

- Tâm vị tự I(-2, 3) và tỉ số vị tự k = 2
- Tâm vị tự I(2, 3) và tỉ số vị tự k = - 2

Bài 7.6.
Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

HD Giải

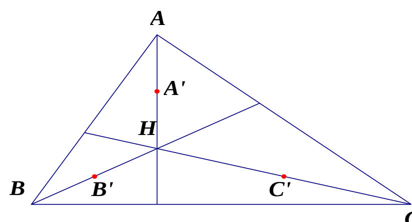
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó: $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Suy ra, phép vị tự tâm G, tỉ số $k=-\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.



Bài 7.7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $k=\frac{1}{2}$.

HD Giải

Ảnh của tam giác A, B, C qua phép vị tự $V_{\left(H,\frac{1}{2}\right)}$ là A', B' và C' lần lượt là trung điểm các cạnh HA, HB, HC. Vậy $V_{\left(H,\frac{1}{2}\right)}:(\Delta ABC)\to\Delta A'B'C'$



Bài 7.8. Tam giác ABC có hai đỉnh B,C cố định còn A chạy trên đường tròn (O,R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

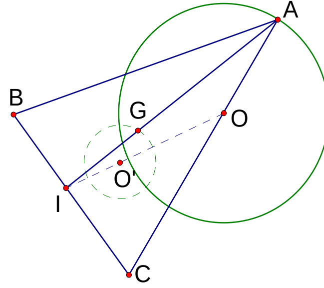
HD Giải

Gọi I là trung điểm BC thì I cố định. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Như vậy, phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G

Từ đó, suy ra khi A chạy trên đường tròn (O,R) thì quỹ tích G là ảnh của đường

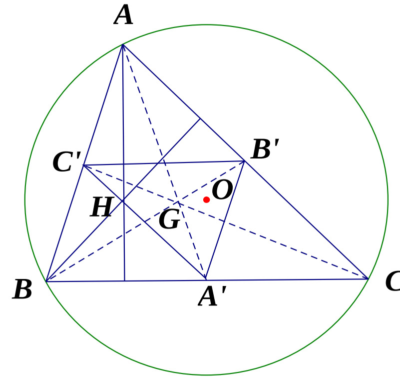
tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O’,R’) mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$



Bài 7.9. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ (như vậy khi ba điểm G, H, O không trùng nhau thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là đường thẳng Ơ-le).

HD ✍Giải

Gọi A’, B’ và C’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.
Ta có $OA' \perp BC$ mà BC // B’C’ nên $OA' \perp B'C'$.
Tương tự, ta cũng có $OB' \perp A'C'$. Vậy O là trực tâm của tam giác A’B’C’.
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$ và $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$. Bởi vậy phép vị tự $V_{(G,-2)} : \Delta A'B'C' \to \Delta ABC$
Điểm O là trực tâm của tam giác A’B’C’ nên $V_{(G,-2)} : O \to H \Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. Điều này chứng tỏ ba điểm G, H, O thẳng hàng.



Bài 7. 10.
Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh AB. Qua M vẽ các đường thẳng song song với trung tuyến AA_1 và BB_1 cắt BC, CA tại P và Q. Tìm quỹ tích các điểm S sao cho tứ giác MPSQ là hình bình hành.

HD ✍Giải

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MQ, MP với AA_1 và BB_1, G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:

$$\frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{BB_1}} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{MQ}} = \frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{BB_1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$$

Tương tự: $\overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

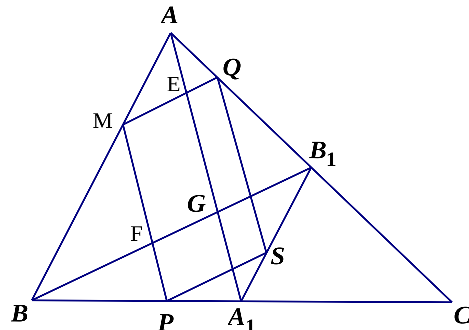
Ta có : $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MS}$.

Suy ra: $\overrightarrow{GS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$

Do đó: S là ảnh của M qua phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$

Khi M thuộc cạnh AB thì S thuôc đoạn A_1B_1 là nảh của AB qua $V_{\left(G,-\frac{1}{2}\right)}$

Vậy quỹ tích S là đoạn thẳng A_1B_1.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 7.11. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d: x + 2y + 4 = 0.

a) Hãy viết phương trình đường thẳng d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k = - 3

b) Hãy viết phương trình đường thẳng d_2 là ảnh của d qua phép vị tự tâm I(1;2) tỉ số $k = -\frac{1}{2}$

Bài 7.12. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$. Hãy viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I(1; 2) tỉ số k = - 2.

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

   Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có M'N' = k.MN

   Nhận xét:

   - Phép dời hình là phép đồng dnạg tỉ số 1.
   - Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$
   - Nếu thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng thì được một phép đồng dạng.
   - Mọi phép đồng dạng F tỉ số k đều là họp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

2. Tính chất

   Phép đồng dạng tỉ số k:

   - Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;
   - Biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng;
   - Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho và , biến góc thành góc bằng nó;
   - Biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính k.R.

Đặt biệt: Phép đồng dạng có một điểm kép O duy nhất là tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay có cùng tâm O. khi đó, kí hiệu: $Z_{(O,k,\varphi)} = Q_{(O,\varphi)}.V_{(O,k)} = V_{(O,k)}.Q_{(O,\varphi)}$, O được gọi là tâm đồng dạng.

3. Hình đồng dạng

   Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia

4. Biểu thức toạ độ của phép đồng dạng $Z_{(I,k,\varphi)}$

   Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, cho phép đồng dạng $Z_{(I,k,\varphi)}$ và M(x; y)

   Gọi $M'(x';y') = Z_{(I,k,\varphi)}(M)$

   - Khi tâm I trùng với gốc toạ độ O, toạ độ điểm M' là $\begin{cases} x' = k\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right) \\ y' = k\left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right) \end{cases}$
   - Khi tâm $I\left(x_0, y_0\right)$, toạ độ điểm M' là $\begin{cases} x' - x_0 = k\left[(x-x_0)\cos\varphi - (y-y_0)\sin\varphi\right] \\ y' - y_0 = k\left[(x-x_0)\sin\varphi + (y-y_0)\cos\varphi\right] \end{cases}$
   -

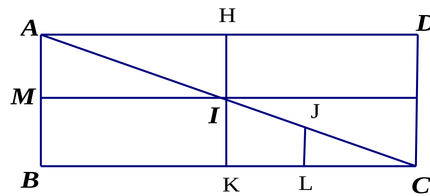
B. BÀI TẬP

Bài 8.1. Cho hình chữ nhật ABCD, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L, và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC, và IC. Chứng minh rằng:
a) Hai hình thang JLKI và IHAB đồng dạng với nhau.
b) Hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.

HD Giải

a) Gọi M là trung điểm AB. Phép vị tự tâm C, tỉ số 2 biến hình thang JLKI thành hình thang IKBA. Phép đối xứng qua đường thẳng IM biến hình thang IKBA thành hình thang IHAB. Do đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên biến hình thang JLKI thành hình thang IHAB. Từ đó suy hai hình thang JLKI và IHAB đồng dạng với nhau.

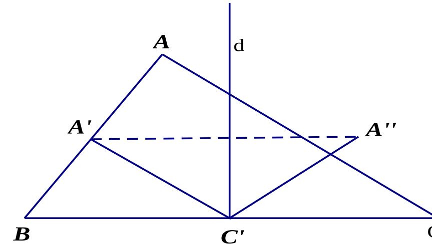
b) Tương tự: Phép đối xứng tâm I biến hình thang IHDC thành hình thang IKBA. Phép vị tự tâm C tỉ số $\frac{1}{2}$ biến hình thang IKBA thành hình thang JLKI. Do đó hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.



Bài 8.2. Cho tam giác ABC. Xác định ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC.

HD Giải

Gọi A', C' tương ứng là trung điểm của AB và BC. Phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác A'BC'. Phép đối xứng qua đường trung trực cạnh BC biến tam giác A'BC' thành tam giác A''CC'. Vậy ảnh của tam giác ABC qua phép đồng đó là tam giác A"CC'.



Bài 8.3. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình x + y – 2 = 0. Viế phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I(-1, -1) tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45^0.

HD Giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm I(-1, -1) tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của nó có dạng: x + y + c = 0

Lấy điểm M(1, 1) thuộc d, $V_{\left(I,\frac{1}{2}\right)}: M \to M' \equiv O \in d_1$

Vậy phương trình của d_1: x + y = 0.

Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45^0 là đường thẳng Oy.

Vậy phương trình của d': x = 0

Bài 8.4. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình: $x = 2\sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc quay 45^0.

HD Giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ thì phương trình của d_1: $x = \sqrt{2}$

Gọi d' là ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc quay 45^0. Lấy $A\left(\sqrt{2},0\right)$ và $B\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ thuộc d_1 thì ảnh của nó qua phép quay nói trên là A'(1,1) và B'(2,0) thuộc d'.

Vậy phương trình d': x + y – 2 = 0.

Bài 8.5. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = -2 và phép đối xứng trục Ox.

HD Giải

Dễ thấy bán kính của (C') là R' = 4. Tâm I' của (C') là ảnh của tâm I(1,2) của (C) qua phép đồng dạng nói trên. $V_{(O,-2)}: I(1,2) \to I_1(-2,-4)$ và $Đ_{Ox}$: $I_1(-2,-4) \to I'(-2,4)$

Vậy phương trình đường tròn (C'): $(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 16$

Bài 8.6. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, cho $\varphi = 45^0$ và k = 2.

a) Viết biểu thức toạ độ của phép đồng dạng $Z_{(O,k,\varphi)}$
b) Viết phương trình đường tròn (C’) là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ qua phép đồng dạng $Z_{(O,k,\varphi)}$.

HD Giải

a) Phép đồng dạng $Z_{(O,k,\varphi)} = Z_{(O,2,45^0)} : M(x;y) \to M'(x';y')$

M’ có toạ độ là $\begin{cases} x' = 2\left(x\cos 45^0 - y\sin 45^0\right) \\ y' = 2\left(x\sin 45^0 + y\cos 45^0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \sqrt{2}\left(x-y\right) \\ y' = \sqrt{2}\left(x+y\right) \end{cases} (*)$

b) $Z_{(O,2,45^0)} : M(x;y) \in (C) \to M'(x';y') \in (C')$. Từ (*) ta có $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x'+y'\right) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x'-y'\right) \end{cases}$ thay vào phương trình đường tròn (C), ta có được: $\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 - 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 12 = 0$

Vậy phương trình đường tròn (C’): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 12 = 0$

Cách khác: Tâm và bán kính đường tròn (C) là I(1; 0), R = 2

Khi đó, ta có $Z_{(O,2,45^0)} : I(1;0) \in (C) \to I'(x';y') \in (C') \Rightarrow I'\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ và R’ = 2R = 4

Vậy phương trình đường tròn (C’): $\left(x-\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-\sqrt{2}\right)^2 = 16$

Bài 8.7. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ vuông góc Oxy, cho điểm I(1; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực họên liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.

HD Giải

Phép đồng dạng $Z_{(O,k,\varphi)} = Z_{(O,\sqrt{2},45^0)} : I(1;1) \to I'(x';y')$

I’ có toạ độ là $\begin{cases} x' = \sqrt{2}\left(x\cos 45^0 - y\sin 45^0\right) \\ y' = \sqrt{2}\left(x\sin 45^0 + y\cos 45^0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow I'(0;2)$

Vậy phương trình của đường tròn tâm I bán kính 2 là phương trình đường tròn tâm I’(0; 2) bán kính $2\sqrt{2}$. Phương trình đó là: $x^2 + (y-2)^2 = 8$.

Bài 8.8. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M’(2x – 1; – 2y + 3). Chứng minh F là một phép đồng dạng.

HD Giải

Lấy điểm N(x_1; y_1), thì điểm N’($2x_1 - 1$; $-2y_1 + 3$) = F(N). Ta có
$M'N'^2 = (2x_1 - 2x)^2 + (-2y_1 + 2y)^2 = 4[(x_1 - 2)^2 + (y_1 - y)^2] = 4MN^2$
Từ đó suy ra với hai điểm M, N tuỳ ý và M’, N’ lần lượt là ảnh của chúng qua F ta có M’N’ = 2MN.
Vậy F là một phép đồng dạng với tỉ số đồng dạng là 2.

Bài 8.9. Cho đường tròn (O), đường kính *AB* = 2*R*. *M* là một điểm bất kì trên (O). Dựng hình vuông *AMNP* có các đỉnh theo chiều dương. Tìm quỹ tích các điểm *N*.

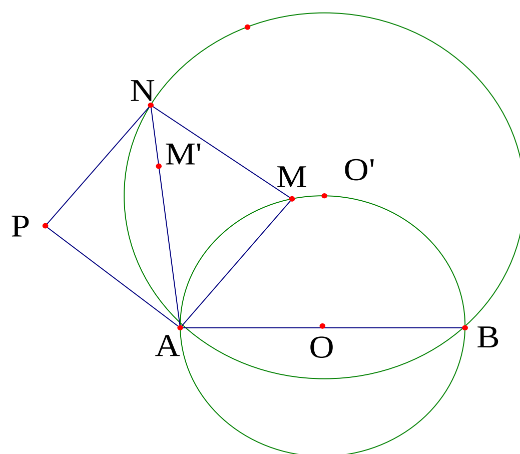
HD Giải

Ta có $AN = \sqrt{2}AM$ và góc (AM,AN) = 45^0
Phép quay $Q_{(A,45^0)} : M \to M'$ và phép vị tự $V_{(A,\sqrt{2})} : M' \to N$

Suy ra: $Z_{(A,\sqrt{2},45^0)} = V_{(A,\sqrt{2})} \circ Q_{(A,45^0)} : M \to N$

Vậy M thuộc đường tròn (O), đường kính AB =

2R nên N thuộc đường tròn (O’) là ảnh của (O) qua phép đồng dạng $Z_{\left(A,\sqrt{2},45^0\right)}$ có tâm O’ là trung điểm của cung AB và bán kính $R' = \sqrt{2}R$



Bài 8.10. Chứng tỏ rằng phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác A’B’C’ thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC lần lượt thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A’B’C’.

HD Giải

- Gọi D là trung điểm của BC thì phép đồng dạng F biến điểm D thành điểm D’ của đoạn thẳng B’C’và vì thế trung tuyến AD của tam giác ABC biến thành trung tuyến A’D’ của tam giác A’B’C’. Đối với hai trung tuyến còn lại cũng thế. Vì trọng tâm tam giác là giao điểm của các đường trung tuyến nên trọng tâm G của tam giác ABC biến thành trọng tâm G’ của A’B’C’.
- Gọi Ah là đường cao của tam giác ABC $(H \in BC)$. Khi đó phép đồng dạng F biến đường thẳng AH thành đường thẳng A’H’. Vì $AH \perp BC$ nên $A'H' \perp B'C'$. Nói cách khác A’H’ là đường cao của tam giác A’B’C’. Đối với hai đường cao còn lại ta cũng làm như thế. Vì trực tâm là giao điểm của các đường cao nên trực tâm của tam giác ABC thành trực tâm của tam giác A’B’C’.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì OA = OB = OC nên nếu điểm O biến thành O’ thì O’A’ = O’B’ = O’C’ = kOA = kOB = kOC. Do đó O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A’B’C’.

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 8.12. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (C’) là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 và phép đối xứng trục Oy.

Bài 8.13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; -3) bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn tâm (I; 2) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiên liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

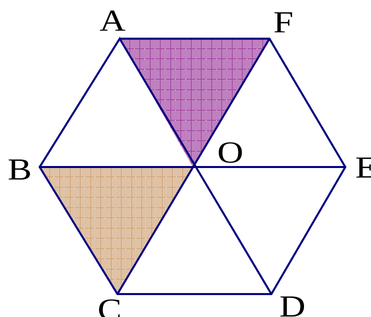
Bài 8.14. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến tam giác HBA thành tam giác ABC.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF
a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$
b) Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE
c) Qua phép quay tâm O góc 120^0.

HD Giải

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ biến tam giác AOF thành tam giác BCO
b) Phép đối xứng qua đường thẳng BE biến tam giác AOF thành tam giác DOC
c) Phép quay tâm O góc 120^0 biến tam giác AOF thành tam giác COB.



Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A(-1;2) và đường thẳng d: 3x + y + 1 = 0. Tìm ảnh của A và d
a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2;1)$
b) Qua phép đối xứng trục Oy
c) Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ
d) Qua phép quay tâm O góc 90^0

HD Giải

Gọi A’, d’ lần lượt là ảnh của A và d qua các phép biến hình trên
a) A’(1; 3) và d’: 3x + y – 6 = 0
b) A’(1; 2) và d’: 3x – y – 1 = 0
c) A’(1; -2) và d’: 3x + y – 1 = 0
d) A’(-2; -1) và d’: x – 3y – 1 = 0.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(3; -2) và bán kính R = 3
a) Viết phương trình của đường tròn đó.
b) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-2;1)$.
c) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng trục Ox.
d) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng gốc toạ độ.

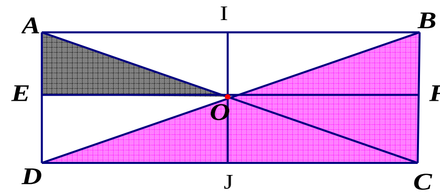
HD Giải

a) Phương trình đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$. Gọi (C’) ảnh của đường tròn qua các phép biến hình trên.
b) $T_{\vec{v}}(C) \to (C')$ suy ra (C’): $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$.
c) $Đ_{Ox}$ (C) $\to$ (C’), suy ra (C’): $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$.
d) $Đ_O$ (C) $\to$ (C’), suy ra (C’): $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$.

Bài 4. Cho hình chữ nhậ ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

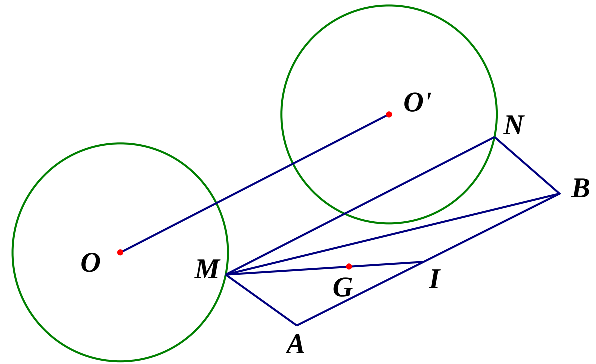
HD Giải

Phép đối xứng qua đường thẳng IJ biến tam giác AEO thành tam giác BFO. Phép vị tự tâm B tỉ số 2 biến tam giác BFO thành tam giác BCD. Vậy phép đồng dạng trên biến tam giác AEO thành tam giác BCD.



Bài 5. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành MABN.
a) Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.
b) Tìm quỹ tích trọng G của tam giác ABM.

HD Giải



a) Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ không đổi, nên có thể xem N là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$. Do đó khi M chạy trên đường tròn (O) thì N chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.
b) Gọi I là trung điểm của AB và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$

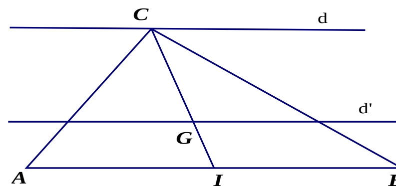
Vậy $V\left(I, \frac{1}{3}\right)$ biến điểm M thành điểm G. Từ đó suy ra quỹ tích điểm G là đường tròn ảnh của (O; R) qua phép vị tự $V\left(I, \frac{1}{3}\right)$.

Bài 6. Cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d song song với đường thẳng AB. Điểm C chạy trên đường thẳng d. Tìm tập hợp các trọng tâm của tam giác ABC.

HD Giải

Gọi I là trung điểm của AB, khi đó I cố định và trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường thẳng CI sao cho $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$. Do đó G là ảnh của C qua $V\left(I, \frac{1}{3}\right)$

Vậy khi C chạy trên đường thẳng d thì G chạy trên đường thẳng d' là ảnh của d qua phép $V\left(I, \frac{1}{3}\right)$



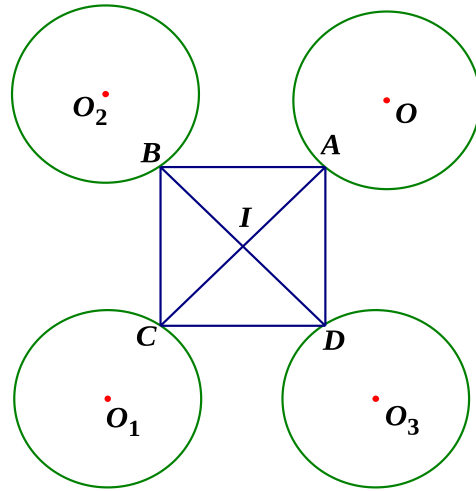
Bài 7. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên đường tròn đó. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, dựng hình vuông ABCD có tâm I.
a) Tìm quỹ tích điểm C
b) Tìm quỹ tích mỗi điểm B và D
c) Khi điểm I trùng với O, có nhận xét gi về ba quỹ tích trên ?

HD Giải

a) Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm A thành điểm C. Vậy quỹ tích điểm C là đường tròn (O_1) là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng đó.

b) Phép quay Q tâm I góc quay $\frac{\pi}{2}$ biến điểm A thành điểm B và phép quay Q' tâm I góc quay $-\frac{\pi}{2}$ biến điểm A thành điểm D. Suy ra quỹ tích B và D lần lượt là đường tròn (O_2), (O_3) là ảnh của đường tròn (O) qua phép quay Q và Q'.

c) Khi I trùng với O thì O_1, O_2, O_3 cũng trùng với O nên ba quỹ tích nói trên đều là đường tròn (O).



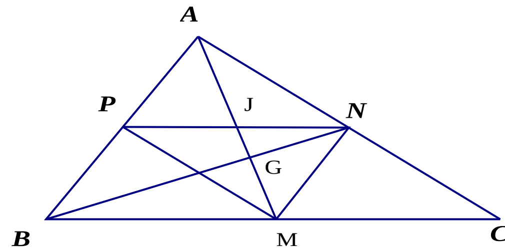
Bài 8. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB.
a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NMC, MNP. Tìm một phép dời hình biến tam giác APN lần lượt thành ba tam giác còn lại.
b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP ?

HD Giải

a) Phép tịnh tiến theo $T_{\overrightarrow{AP}}$ biến tam giác APN thành tam giác PBM.
Phép tịnh tiến theo $T_{\overrightarrow{AN}}$ biến tam giác APN thành tam giác NMC.
Gọi J là trung điểm của PN. Phép đối xứng tâm Đ$_J$ biến tam giác APN thành tam giác MNP

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Vậy phép vị tự tâm G, tỉ số k $= -\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.



Bài 9. Cho đường (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi BC = m. Tìm quỹ tích điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

HD Giải

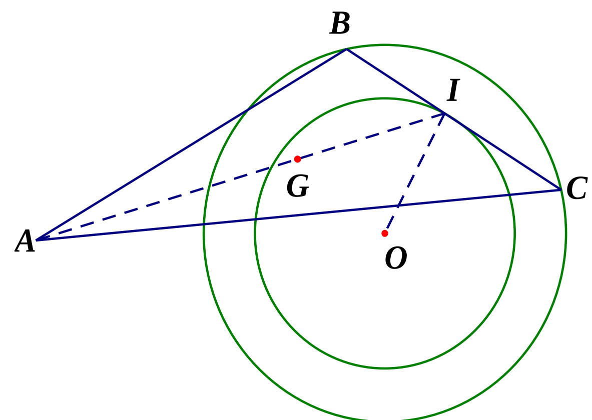
Gọi I là trung điểm của BC. ta có

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, tức là phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{2}{3}$ biến điểm I thành điểm G.

Trong tam giác OIB, ta có

$$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = R'$$

Nên quỹ tích điểm I là đường tròn (O; R') hoặc là O (nếu lấy m = 2R). Do đó quỹ tích điểm G là ảnh của điểm I qua phép vị tự đó.



Bài 10. Cho đường thẳng *d* và điểm *G* không nằm trên *d*. Với hai điểm *A*, *B* thay đổi trên *d*, ta lấy điểm *C* sao cho *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Tìm quỹ tích điểm *C*.

HD ✍ Giải

Gọi M là trung điểm của AB thì phép vị tự V tâm G tỉ số k = - 2 biến điểm M thành điểm C. Vì M di chuyển trên d nên quỹ tích của C là ảnh của d qua phép vị tự V.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 11. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(1;1), B(0;3), C(2;4). Xác định ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau:

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2;1)$

b) Phép quay tâm O góc 90^0

c) Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = - 2 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$.

d) .

Bài 12. Cho hình vuông ABCD, tâm O. Vẽ hình vuông AOBE.

a) Tìm ảnh của hình vuông AOBE qua phép quay tâm A, góc (AO,AD)

b) Tìm phép biến hình biến hình vuông AOBE thành hình vuông ADCB

Bài 13. Trong mặt phẳng Oxy. Cho $\vec{v} = (2;-1)$, đường thẳng (d): 2x -3y + 3 = 0 và (d_1): 2x – 3y – 5 = 0.

a) Viết phương trình của đường thẳng (d') là ảnh của (d) qua $T_{\vec{v}}$.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{w}$ có giá vuông góc với đường thẳng (d) để (d_1) là ảnh của (d) qua $T_{\vec{w}}$.

Bài 14. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Lấy một điểm M trên đường tròn. Gọi M' là ảnh của M qua phép tâm O góc quay 30^0 và M" là ảnh của M'qua phép đối xứng qua đường thẳng OM. Chứng minh rằng OM'M" là tam giác đều.

Bài 15. Cho hình vuông ABCD tâm O. M, N lần lượt là trung điểm của AB và AO. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

Bài 16. Trong mp Oxy cho đường thẳng d: x + y – 2 = 0. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I(-1; -1) tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45^0.

Bài 17. Trong mp Oxy, cho đường tròn (C): $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách phép vị tự tâm O tỉ số k = -2 và phép $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (2;-1)$.

Bài 18. Trong mp Oxy, cho điểm I(1; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 45^0 và phép vị tự tâm O tỉ số $k = \sqrt{2}$.

Bài 19. Cho hình bình hành ABCD tâm O với B, D là 2 điểm cố định, điểm A di động trên đường thẳng vuông góc với BC. Tìm quĩ tích điểm C.

CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG
PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các hình dưới đây, hình nào có vô số tâm đối xứng ?
A. Đường elip. **B.** Hình lục giác đều.
C. Hai đường thẳng song song. **D.** Hai đường thẳng cắt nhau.

Câu 2: Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d'?
A. Vô số. **B.** Một. **C.** Không có. **D.** Hai.

Câu 3: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x-y-3=0$. Viết phương trình (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-10x-4y+27=0$ qua phép phép đối xứng trục d.
A. $(x+1)^2+(y+4)^2=2.$ **B.** $(x-1)^2+(y-4)^2=2.$
C. $(x-5)^2+(y-2)^2=16.$ **D.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4.$

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(2;1)$ và điểm $M(4;5)$. Trong các điểm dưới đây, M là ảnh của điểm nào dưới đây qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.
A. $M_4(3;3).$ **B.** $M_3(2;6).$ **C.** $M_1(2;4).$ **D.** $M_2(6;6).$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực họên liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.
A. $(x-1)^2+(y-1)^2=4.$ **B.** $(x+1)^2+(y-2)^2=8.$
C. $(x-2)^2+y^2=8.$ **D.** $x^2+(y-2)^2=8.$

Câu 6: Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng ?
A. Một. **B.** Vô số. **C.** Hai. **D.** Không có.

Câu 7: Cho hình chữ nhật có O là tâm đối xứng. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc $\alpha, 0\le\alpha\le 2\pi$, biến hình chữ nhật trên thành chính nó ?
A. Không có. **B.** Bốn. **C.** Hai. **D.** Ba.

Câu 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$. Tìm tọa độ ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox.
A. $(x;-y).$ **B.** $(y;-x).$ **C.** $(-x;y).$ **D.** $(-y;-x).$

Câu 9: Trong các hình dưới đây, hình nào không có tâm đối xứng ?
A. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.
B. Hình lục giác đều.
C. Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.
D. Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.

Câu 10: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?
A. Phép đối xứng tâm có đúng một điểm biến thành chính nó.
B. Phép đối xứng tâm có hai điểm biến thành chính nó.
C. Phép đối xứng tâm không có điểm nào biến thành chính nó.
D. Phép đối xứng tâm có vô số điểm biến thành chính nó.

Câu 11: Hình gồm hai đường tròn phân biệt có cùng bán kính có bao nhiêu tâm đối xứng ?
A. Vô số. **B.** Không có. **C.** Một. **D.** Hai.

Câu 12: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;3)$. Trong các điểm dưới đây, M là ảnh của điểm nào dưới đây qua phép đối xứng trục Oy.
A. $M_4(-2;3).$ **B.** $M_3(3;-2).$ **C.** $M_2(3;2).$ **D.** $M_4(2;-3).$

Câu 13: Mệnh đề nào dưới đây sai ?
A. Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng. **B.** Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.
C. Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng. **D.** Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.

Câu 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;5)$ và đường thẳng *d* có phương trình $x-2y+4=0$. Tìm tọa độ ảnh của *M* qua phép đối xứng trục *d*.
A. $(2;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(3;1)$.

Câu 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x=2$. Trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào là ảnh của Δ qua phép đối xứng tâm *O* ?
A. $x=2$. **B.** $y=2$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=-2$.

Câu 16: Hình vuông có mấy trục đối xứng ?
A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 17: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(-2;4)$.Hỏi phép vị tự tâm *O* tỉ số $k=-2$ biến điểm *M* thành điểm nào trong các điểm dưới đây ?
A. $H(-8;4)$. **B.** $I(4;-8)$. **C.** $H(4;8)$. **D.** $J(-4;-8)$.

Câu 18: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng *d* có phương trình $x+y-2=0$. Viế phương trình đường thẳng d' là ảnh của *d* qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm *O* góc 45^0.
A. $x+2y-1=0$. **B.** $y=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $x=0$.

Câu 19: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}=(1;2)$ và điểm $M(2;5)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là ảnh của điểm *M* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.
A. $M_3(1;6)$. **B.** $M_2(4;7)$. **C.** $M_4(3;1)$. **D.** $M_1(3;7)$.

Câu 20: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;3)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là ảnh của điểm *M* qua phép đối xứng qua đường thẳng $x-y=0$.
A. $P(2;-3)$. **B.** $Q(3;-2)$. **C.** $K(-2;3)$. **D.** $N(3;2)$.

Câu 21: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(x;y)$. Tìm tọa độ ảnh của *M* qua phép đối xứng trục *Oy*.
A. $(y;x)$. **B.** $(-x;-y)$. **C.** $(-x;y)$. **D.** $(y;-x)$.

Câu 22: Mệnh đề nào dưới đây sai?
A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. **B.** Phép đồng dạng là một phép dời hình.
C. Phép vị tự là một phép đồng dạng. **D.** Có phép vị tự không phải là phép dời hình.

Câu 23: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 3x-2y-1=0$.Tìm ảnh của đường thẳng *d* qua phép đối xứng tâm O.
A. $d_3: 3x+2y-1=0$. **B.** $d_1: 3x-2y+1=0$. **C.** $d_4: 3x+2y+1=0$. **D.** $d_2: 3x-2y-1=0$.

Câu 24: Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm *O* góc $\alpha \neq k2\pi, k$ là một số nguyên ?
A. Một. **B.** Vô số. **C.** Không có. **D.** Hai.

Câu 25: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng *d* có phương trình $x=2\sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của *d* qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm *O* tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm *O* góc quay 45^0.
A. $x+y+2=0$. **B.** $y-2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+2y-3=0$.

Câu 26: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?
A. Đường tròn là hình có vô số trục đối xứng.

B. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm hai đường thẳng vuông góc.
C. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là đường tròn.
D. Một hình có vô số trục đối xứng thì hình đó phải là hình gồm những đường tròn đồng tâm.

Câu 27: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y+4=0.$ Hỏi trong bốn đường thẳng cho bởi các phương trình sau đường thẳng nào có thể biến thành Δ qua một phép đối xứng tâm ?
A. $2x+2y-3=0.$ **B.** $2x+y-4=0.$ **C.** $x+y-1=0.$ **D.** $2x-2y+1=0.$

Câu 28: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M\left(2;5\right).$ Trong các điểm dưới đây, điểm nào là ảnh của điểm *M* qua phép đối xứng trục Ox.
A. $M_3\left(-2;3\right).$ **B.** $M_4\left(3;-2\right).$ **C.** $M_2\left(2;-3\right).$ **D.** $M_1\left(3;2\right).$

Câu 29: Cho tam giác đều tâm *O*. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm *O* góc $\alpha, 0\le\alpha\le 2\pi,$ biến tam giác trên thành chính nó ?
A. Hai. **B.** Bốn. **C.** Ba. **D.** Một.

Câu 30: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4.$ Hỏi phép vị tự tâm O tỉ số $k=-2$ biến (*C*) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình dưới đây ?
A. $\left(x+2\right)^2+\left(y+4\right)^2=16.$ **B.** $\left(x-4\right)^2+\left(y-2\right)^2=16.$
C. $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=16.$ **D.** $\left(x-4\right)^2+\left(y-2\right)^2=4.$

Câu 31: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $d: x+y-2=0.$ Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm *O* và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=\left(3;2\right)$ biến *d* thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình dưới đây ?
A. $3x+3y-2=0.$ **B.** $x+y-3=0.$ **C.** $x+y+2=0.$ **D.** $x-y+2=0.$

Câu 32: Mệnh đề nào dưới đây sai ?
A. Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
B. Phép tịnh tiến trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
C. Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
D. Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Câu 33: Phép dời hình nào dưới đâyvkhông có tính chất “Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ?
A. Phép tịnh tiến. **B.** Phép đối xứng trục. **C.** Phép đối xứng tâm. **D.** Phép vị tự.

Câu 34: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó ?
A. Vô số. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Không có.

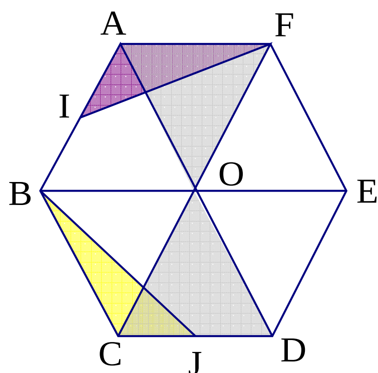
Câu 35: Mệnh đề nào dưới đây đúng ?
A. Thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng trục sẽ được một phép đối xứng trục.
B. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.
C. Thực hiện liên tiếp phép quay và phép tịnh tiến sẽ được một phép tịnh tiến.
D. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm và phép đối xứng qua trục sẽ được một phép đối xứng qua tâm.

Câu 36: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $d: 2x+y-3=0.$ Hỏi phép vị tự tâm *O* tỉ số $k=2$ biến *d* thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình dưới đây ?
A. $2x+y-3=0.$ **B.** $4x+2y-5=0.$ **C.** $2x+y-6=0.$ **D.** $4x-y-3=0.$

Câu 37: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $d: x+y-2=0.$ Hỏi phép vị tự tâm *O* tỉ số $k=-2$ biến *d* thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình dưới đây ?
A. $x+y+4=0.$ **B.** $2x+2y=0.$ **C.** $x+y-4=0.$ **D.** $x+y-4=0.$

Câu 38: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến *d* thành d'?
A. Một. **B.** Hai. **C.** Vô số. **D.** Không có.

Câu 39: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm *O*, gọi *I*, *J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD* có hình vẽ bên. Tìm một phép dời hình biến tam giác *AIF* thành tam giác CJB.



A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$.

B. Phép quay tâm B góc 120^0.

C. Phép quay tâm O góc 120^0.

D. Phép đối xứng qua trục BO.

Câu 40: Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

A. Phép đối xứng trục. **B.** Phép đồng nhất.
C. Phép vị tự tỉ số -1. **D.** Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng.

Câu 41: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$. Hỏi phép đồng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90^0 biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình dưới đây ?

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.
C. $(x+2)^2+(y-1)^2=4$. **D.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 42: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v}=(-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x-5y+3=0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

A. $3x-5y+24=0$. **B.** $3x-5y+16=0$. **C.** $x+y+2=0$. **D.** $3x+5y-24=0$.

Câu 43: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Xét phép quay Q có tâm quay O góc quay φ. Với giá trị nào dưới đây của φ, phép quay Q biến hình vuông $ABCD$ thành chính nó ?

A. $\varphi=\frac{\pi}{6}$. **B.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **C.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **D.** $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(2;4)$. Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k=\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy biến điểm M thành điểm nào trong các điểm dưới đây ?

A. $N(1;2)$. **B.** $M(-1;2)$. **C.** $P(-2;4)$. **D.** $Q(1;-2)$.

Câu 45: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình $2x-y-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của $\Delta: x-3y+11=0$ qua phép đối xứng trục d.

A. $3x-y-7=0$. **B.** $3x+y-17=0$. **C.** $3x+y+17=0$. **D.** $3x+2y-15=0$.

Câu 46: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M(1;1)$. Trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép quay tâm O, góc 45^0 ?

A. $Q(1;0)$. **B.** $N(0;\sqrt{2})$. **C.** $K(-1;1)$. **D.** $P(\sqrt{2};0)$.

Câu 47: Cho tam giác hình tâm O. Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc $\alpha, 0\le\alpha\le 2\pi$, biến hình vuông trên thành chính nó ?

A. Bốn. **B.** Hai. **C.** Ba. **D.** Một.

Câu 48: Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó.

B. Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.
C. Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.
D. Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

Câu 49: Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A\left(-3;2\right), B\left(-4;5\right)$ và $C\left(-1;3\right)$. Gọi tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác *ABC* qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm *O* góc 90^0 và phép đối xứng qua trục *Ox*. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$.

A. $A'\left(2;-3\right), B'\left(5;-4\right), C'\left(3;-1\right)$. **B.** $A'\left(2;-3\right), B'\left(4;5\right), C'\left(-1;3\right)$.
C. $A'\left(-2;3\right), B'\left(5;4\right), C'\left(3;-1\right)$. **D.** $A'\left(2;3\right), B'\left(5;4\right), C'\left(-3;1\right)$.

Câu 50: Trong các hình dưới đây, hình nào có bốn trục đối xứng ?
A. Hình vuông. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình thoi.

Câu 51: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $d: 2x - y = 0$. Hỏi phép đồng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm *O* tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục *Oy* biến *d* thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình dưới đây ?
A. $2x + y - 2 = 0$. **B.** $2x - y = 0$. **C.** $4x - y = 0$. **D.** $2x + y = 0$.

Câu 52: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $M\left(1;1\right)$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm *O* và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \left(2;3\right)$ biến *M* thành điểm nào trong các điểm dưới đây ?
A. $P\left(2;0\right)$. **B.** $H\left(4;4\right)$. **C.** $K\left(1;3\right)$. **D.** $Q\left(0;2\right)$.

Câu 53: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 3x - 2y + 1 = 0$. Tìm ảnh của đường thẳng *d* qua phép đối xứng trục Ox.
A. $d_2: 3x + 2y - 1 = 0$. **B.** $d_4: 3x - 2y - 1 = 0$. **C.** $d_3: -3x + 2y - 1 = 0$. **D.** $d_1: 3x + 2y + 1 = 0$.

Câu 54: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = \left(2;-1\right)$ và điểm $M\left(-3;2\right)$. Trong các điểm dưới đây, điểm nào là ảnh của điểm *M* qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.
A. $M_1\left(-1;1\right)$. **B.** $M_2\left(5;3\right)$. **C.** $M_3\left(1;1\right)$. **D.** $M_4\left(1;-1\right)$.

Câu 55: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y + 1 = 0$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ để phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến *d* thành chính nó.
A. $\vec{v} = \left(2;1\right)$. **B.** $\vec{v} = \left(2;-1\right)$. **C.** $\vec{v} = \left(1;2\right)$. **D.** $\vec{v} = \left(-1;2\right)$.

Câu 56: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (*C'*) là ảnh của (*C*) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm *O* tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng trục *Ox*.
A. $\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 16$. **B.** $\left(x-2\right)^2 + \left(y+4\right)^2 = 16$.
C. $\left(x-2\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 16$. **D.** $\left(x+2\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 16$.

Câu 57: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $I\left(1;2\right)$ và $M\left(2;3\right)$. Trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của *M* qua phép đối xứng tâm *I* ?
A. $P\left(5;-4\right)$. **B.** $J\left(-1;3\right)$. **C.** $H\left(-1;5\right)$. **D.** $K\left(2;1\right)$.

Câu 58: Cho hình vuông $ABCD$ tâm *O*. Tìm ảnh của đường thẳng *BC* qua phép quay tâm *O* góc 90^0.
A. CD. **B.** AC. **C.** BA. **D.** AD.

Câu 59: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó ?
A. Bốn. **B.** Một. **C.** Hai. **D.** Vô số.

Câu 60: Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng cho trước thành chính nó ?
A. Không có. **B.** Vô số. **C.** Chỉ có hai. **D.** Chỉ có một.

Câu 61: Trong mặt phẳng O*xy*, cho đường tròn (*C*) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Tìm ảnh của (*C*) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;3)$.

A. $(x-1)^2+(y+1)^2=9$. **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=9$. **D.** $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

Câu 62: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục *Oy* và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=\left(2;3\right)$ biến (*C*) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình dưới đây ?

A. $\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=4$. **B.** $\left(x-2\right)^2+\left(y-6\right)^2=4$.

C. $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$. **D.** $x^2+y^2=4$.

ĐÁP ÁN
CHƯƠNG I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A		■				■		■	■	■		■	■							
B			■														■			
C	■			■			■				■									
D					■									■	■	■		■	■	■

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A				■		■				■							■			
B		■	■								■		■	■	■			■		
C	■				■			■	■			■				■			■	
D							■													■

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A		■					■		■	■				■				■		
B				■	■	■													■	■
C								■							■		■			
D	■		■								■	■	■			■				

	61	62
A		
B	■	
C		■
D		

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Các tính chất thừa nhận
Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt .
Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
Tính chất 3. Nếu đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
Lưu ý: Đường thẳng *d* nằm trong $mp(\alpha)$ ta kí hiệu: $d \subset (\alpha)\ hay\ (\alpha) \supset d$
Tính chất 4. Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
Tính chất 5. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
Như vậy: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy và đường thẳng đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
Tính chất 6. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.
II. Cách xác định mặt phẳng.
Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:
1. Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng
2. Nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó
3. Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau

Kí hiệu
- (*ABC*) biểu thị mặt phẳng xác định bởi ba điểm phân biệt không thẳng hàng *A*, *B*, *C*.
- (*M*, *d*) biểu thị mặt phẳng xác định bởi đường thẳng *d* và điểm *M* không nằm trên *d*.
- (d_1, d_2) biểu thị mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1 và d_2.

III. Hình chóp và hình tứ diện
1. Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Điểm *S* nằm ngoài (α). Lần lượt nối *S* với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm có đa giác $A_1A_2...A_n$ và *n* tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp , kí hiệu $S.A_1A_2...A_n$

2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác *ABC*, *ABD*, *ACD* và *BCD* được gọi là hình tứ diện , kí hiệu *ABCD*.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng
Phương pháp: Ta đi tìm hai điểm chung phân bệt của hai mặt phẳng đó. Giao tuyến của chúng là đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Nghĩa là: $$\begin{cases} \alpha \cap \beta = M \\ \alpha \cap \beta = N \\ M \not\equiv N \end{cases} \Rightarrow \alpha \cap \beta = MN$$

Bài 1.1. Cho bốn điểm không đồng phẳng *A*, *B*, *C* và *D*. Trên đoạn *AB* và *AC* lấy hai điểm *M* và *N* sao cho $\frac{AM}{BM}=1;\frac{AN}{NC}=2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (*DMN*) với các mặt (*ABD*), (*ACD*), (*ABC*) và (*BCD*) .

HD Giải

❖ $(DMN)\cap(ADB)=?$.

Ta có $D\in(DMN)\cap(ADB)$

$\left.\begin{array}{l}M\in(DMN)\\ M\in AB\subset(ABD)\Rightarrow M\in(ABD)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow M\in(DMN)\cap(ABD)$

Vậy : $DM=(DMN)\cap(ABD)$

❖ $(DMN)\cap(ACD)=DN$

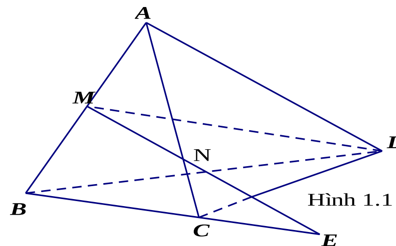
❖ $(DMN)\cap(ABC)=MN$

❖ $(DMN)\cap(BCD)=?$

Trong mp(ABC) có $\frac{AM}{BM}\neq\frac{AN}{NC}$, nên

$MN\cap BC=E$

Tương tự: $(DMN)\cap(BCD)=DE$



Hình 1.1

Bài 1.2. Cho *S* là một điểm không thuộc mặt phẳng hình bình hành *ABCD*. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*).

HD Giải

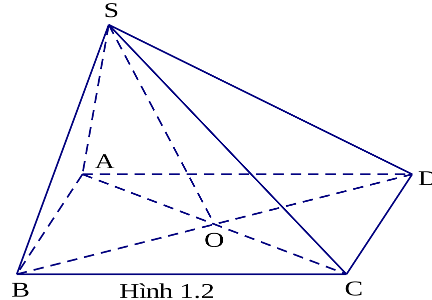
Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Ta có

$S\in(SAC)\cap(SBD)$

$\left.\begin{array}{l}O\in AC\subset(SAC)\\ O\in BD\subset(SBD)\end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)$

nên $SO=(SAC)\cap(SBD)$

Vậy giao tuyến hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) là đường thẳng *SO*



Hình 1.2

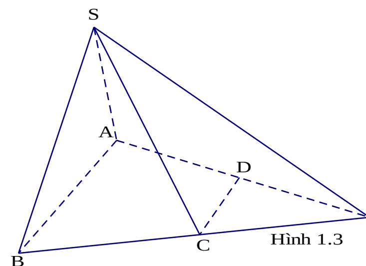
Bài 1.3. Cho *S* là một điểm không thuộc mặt phẳng hình thang *ABCD* (*AB* // *CD* và *AB* > *CD*). Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*).

HD Giải

Gọi *I* là giao điểm *AD* và *BC*. Ta có *S* và *I* là hai điểm chung của (*SAD*) và (*SBC*), nên

$SI=(SAD)\cap(SBC)$

Vậy giao tuyến hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*) là đường thẳng *SI*.



Hình 1.3

Bài 1.4. Cho bốn điểm *A,B,C,D* không đồng phẳng. Gọi *I*, *K* lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng *AD* và *BC*.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*IBC*) và (*KAD*)

b) Gọi *M* và *N* là hai điểm lần lượt trên hai đường thẳng *AB* và *AC*. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*IBC*) và (*DMN*).

HD Giải

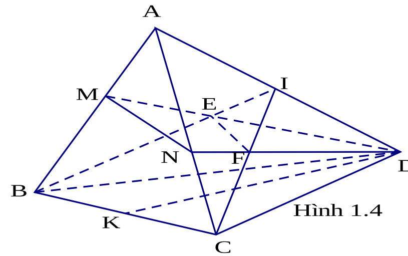
a) $(IBC)\cap(KAD)=KI$.

Vậy giao tuyến hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) là đường thẳng KI.

b) Trong mp (ABD), gọi $E=MD\cap BI$, trong mp(ACD), gọi $F=ND\cap CI$

Ta có: $(IBC)\cap(DMN)=EF$

Vậy giao tuyến hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) là đường thẳng EF.



Hình 1.4

Vấn đề 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

Phương pháp: Để tìm giao điểm của một đường thẳng d và một mặt phẳng (α), ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng d với một đường thẳng d' nằm trong mặt phẳng (α)

Nghĩa là: $\left.\begin{matrix} mp\ phụ(\beta)\supset d \\ (\beta)\cap(\alpha)=d' \\ d'\cap d=I \end{matrix}\right\}\Rightarrow d\cap(\alpha)=I$

Bài 1.5. Cho tam giác *BCD* và điểm *A* không thuộc mặt phẳng (*BCD*). Gọi *K* là trung điểm của đoạn *AD* và *G* là trọng tâm của tam giác *ABC*. Tìm giao điểm của đường thẳng *GK* với mặt phẳng (*BCD*).

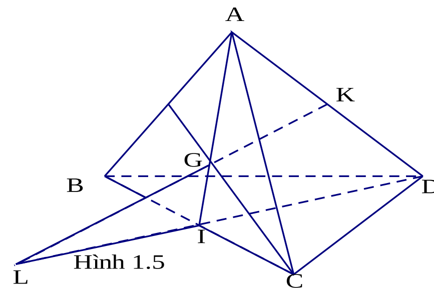
HD Giải

Gọi J là giao điểm của AG và BC. Trong mặt phẳng (AJD), ta có $\frac{AG}{AJ}=\frac{2}{3};\frac{AK}{AD}=\frac{1}{2}$ nên GK và JD cắt nhau. Gọi *L* là giao điểm của *GK* và *JD*.

Ta có $L\in GK$

$\begin{cases} L\in JD \\ JD\subset(BCD) \end{cases}\Rightarrow L\in(BCD)$

Vậy *L* là giao điểm của *GK* và (*BCD*)



Hình 1.5

Bài 1.6. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB* và *CD*, trên *AD* lấy điểm *P* không trùng với trung điểm *AD*.

a) Gọi *E* là giao điểm của đường thẳng *MP* và *BD*. Tìm giao tuyến của hai mp (*PMN*) và (*BCD*)

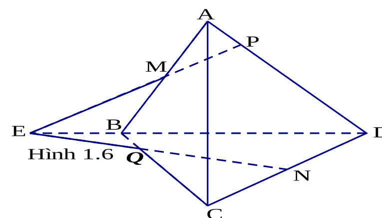
b) Tìm giao điểm của hai mp (*PMN*) và *BC*.

HD Giải

a) $(MNP)\cap(BCD)=EN$

b) Trong mp (BCD), gọi $Q=EN\cap BC$

Ta có : $BC\cap(MNP)=Q$

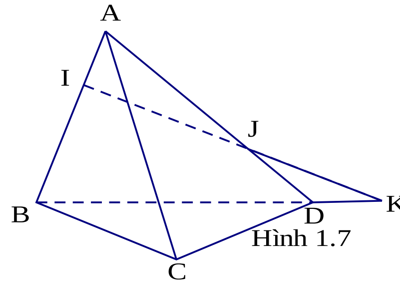


Hình 1.6

Bài 1.7. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *I*, *J* là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh *AB*, *AD* với $AI=\frac{1}{2}IB$ và $AJ=\frac{2}{3}JD$. Tìm giao điểm của đường thẳng *IJ* với mặt phẳng (*BCD*).

HD Giải

Do $\begin{cases} AI = \dfrac{1}{2} IB \\ AJ = \dfrac{2}{3} JD \end{cases}$ nên *IJ* kéo dài cắt *BD*, gọi giao điểm là *K*. Khi đó $K = IJ \cap (BCD)$

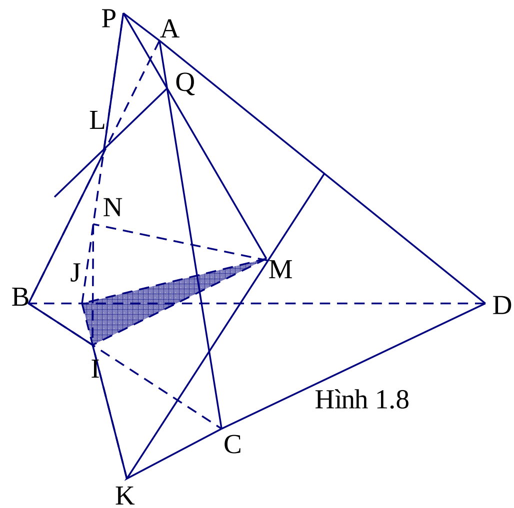


Hình 1.7

Bài 1.8. Cho tứ diện *ABCD* và điểm *M* thuộc miền trong của tam giác *ACD*. Gọi *I* và *J* lần lượt là hai điểm trên cạnh *BC* và *BD* sao cho *IJ* không song song với *CD*.
a) Hãy xác định giao tuyến hai mặt phẳng (*IJM*) và (*ACD*)
b) Lấy điểm *N* thuộc miền trong tam giác *ABD* sao cho *JN* cắt đoạn *AB* tại *L*. Tìm giao tuyến của hai mp (*MNJ*) và (*ABC*).

HD Giải

a) Trong mp(*BCD*) có *IJ* không song song với *CD*
nên: $K = IJ \cap CD$
M là điểm chung thứ nhất của (*ACD*) và (*IJM*)
K là điểm chung thứ hai của (*ACD*) và (*IJM*)
Vậy: $(IJM) \cap (ACD) = MK$
b) Với $L = JN \cap AB$,
L là giao điểm thứ nhất của hai mp(*MNJ*) và (*ABC*)
Trong mp(*ABD*), gọi $P = JL \cap AD, Q = PM \cap AC$
Ta có *Q* là giao điểm thứ hai của hai mp(*MNJ*) và (*ABC*)
Vậy: $(MNJ) \cap (ABC) = LQ$

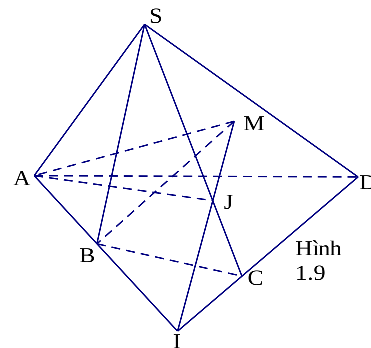


Hình 1.8

Bài 1.9. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là tứ giác *ABCD* có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm *M* thuôc miền trong của tam giác *SCD*. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
a) (*SBM*) và (*SCD*) b) (*ABM*) và(*SCD*) c) (*ABM*) và (*SAC*)

HD Giải

a) Ta có ngay: $(SBM) \cap (SCD) = SM$
b) Ta có: $M \in (ABM) \cap (SCD)$
Trong mp (*ABCD*) gọi $I = AB \cap CD$
Suy ra : $MI = (ABM) \cap (SCD)$
c) Ta có: $A \in (ABM) \cap (SAC)$.
Trong mp (SCD), gọi $J = IM \cap SC$
Suy ra: $J \in (ABM) \cap (SAC)$
Vậy: $AJ = (ABM) \cap (SAC)$



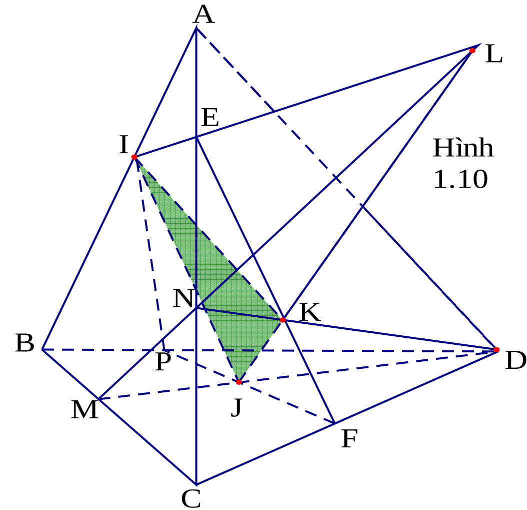
Hình 1.9

Bài 1.10. Cho tứ diện ABCD. Trên AB lấy điểm I và lấy các điểm J, K lần lượt là điểm thuộc miền trong các tam giác BCD và ACD. Gọi L là giao điểm của JK với mp (ABC).
a) Hãy xác định L
b) Tìm giao tuyến của mp(IJK) với các mặt của tứ diện ABCD.

HD Giải

a) Trong mp (ACD), gọi $N \in DK \cap AC$ Trong mp (BCD), gọi $M = DJ \cap BC$

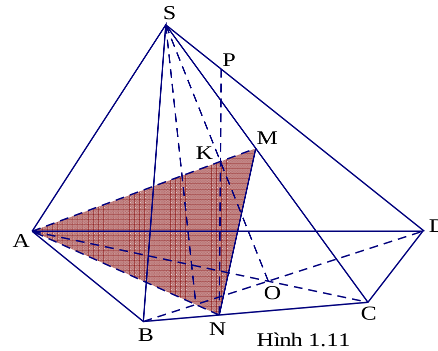
Ta có $MN = (DJK) \cap (ABC) \Rightarrow MN \subset (ABC)$
Vì $L = (ABC) \cap JK$ nên dễ thấy
$L = JK \cap MN$
b) Ta có: $I \in (ABC) \cap (IJK)$
và $L = JK \cap MN$
Nên có $IM = (ABC) \cap (IJK)$
Trong mp(ABC) và (ACD) gọi $E = IL \cap AC$
và $F = EK \cap CD$
Suy ra: $EF = (ACD) \cap (IJK)$
Trong mp (BCA), nối FJ cắt BD tại P.
Suy ra: $PF = (BCD) \cap (IJK)$ và
$PI = (ABD) \cap (IJK)$



Bài 1.11. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là tứ giác, *M* và *N* tương ứng là các điểm thuộc các cạnh *SC* và *BC*. Tìm giao điểm của đường thẳng *SD* với mặt phẳng (*AMN*).

HD Giải

Gọi $O = AC \cap BD$ .Trong mp(SAC), gọi
$K = SO \cap AM$
Trong mp(ABCD), gọi $L = BD \cap AN$
Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.
Và ta có: $LK = (SBD) \cap (AMN)$
Mà trong mp (SBD), có $LK \cap SD = P$
Vậy: $P = SD \cap (AMN)$



Vấn đề 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Phương pháp: Để chứng ba điểm thẳng hàng, ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng riêng biệt.

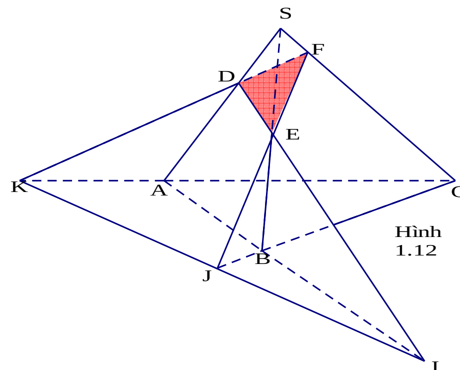
Bài 1.12. Cho tứ diện *SABC*. Trên *SA*, *SB*, *SC* lần lượt lấy các điểm *D*, *E* và *F* sao cho cắt *AB* tại *I*, *EF* cắt *BC* tại *J*, *FD* cắt *CA* tại *K*. Chứng minh rằng ba điểm *I*, *J*, *K* thẳng hàng.

HD Giải

Ta có: $\left.\begin{array}{l} I \in DE \\ DE \subset (DEF) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (DEF)$

Và $\left.\begin{array}{l} I \in AB \\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (ABC)$

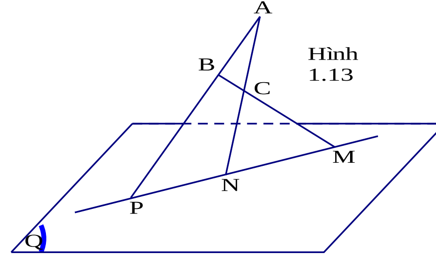
Suy ra: $J \in (MNK) \cap (BCD)$
Lí luận tương tự ta có:
J, *K* cũng là điểm chung của hai mặt phẳng (*DEF*) và (*ABC*)
Vậy *I*, *J*, *K* thuộc về giao tuyến của hai mặt phẳng (*DEF*) và (*ABC*) nên *I*, *J*, *K* thẳng hàng.



Bài 1.13. Cho ba điểm A, B, C không thuộc mặt phẳng (Q) và các đường thẳng BC, CA, AB cắt (Q) lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng *M, N, P* thẳng hàng.

HD Giải

Ta có *M*, *N*, *P* lần lượt thuộc về hai mặt phẳng (*Q*) và (*ABC*), nên *M*, *N*, *P* thuộc về giao tuyến của hai mặt phẳng (*Q*) và (*ABC*). Vậy *M*, *N*, *P* thẳng hàng.



Bài 1.14. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là tứ giác. *AC* cắt *BD* tại *O*. Mặt phẳng (α) cắt *SA*, *SB*, *SC* và *SD* lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và D_1. Gọi *I* là giao điểm của A_1C_1 và B_1D_1. Chứng minh ba điểm *S, I, O* thẳng hàng.

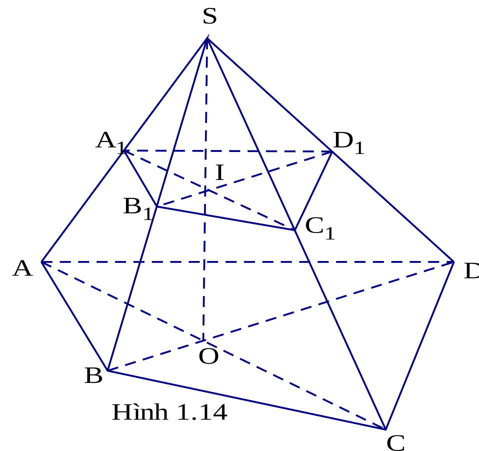
HD✍Giải

Ta có $I = AC \cap BD$

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} (1)$

$\begin{cases} I \in A_1C_1 \subset (SAC) \\ I \in B_1D_1 \subset (SBD) \end{cases} (2); \begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} (3)$

Từ đó suy. S, I, O là ba điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Nên S, I, O thuộc về giao tuyến hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
Vậy S, I, O thẳng hàng.

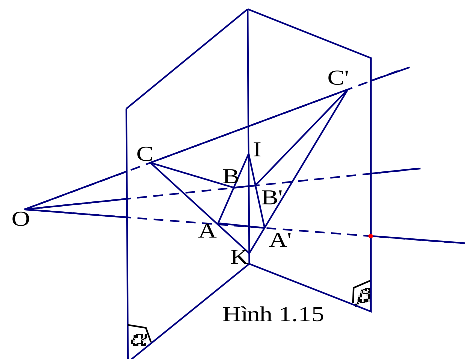


Hình 1.14

Bài 1.15. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo một giao tuyến *d*. Trong (α) lấy hai điểm *A* và *B* sao cho *AB* cắt *d* tại *I*. *O* là một điểm nằm ngoài (α) và (β) sao cho *OA* và *OB* cắt (β) tại *A'* và *B'*.
a) Chứng minh ba điểm *I, A', B'* thẳng hàng
b) Trong (α) lấy điểm *C* sao cho *A, B, C* không thẳng hàng. Giả sử *OC* cắt (β) tại *C'*, *BC* cắt *B'C'* tại *J*, *CA* cắt *C'A'* tại *K*. Chứng minh ba điểm *I, J, K* thẳng hàng

HD✍Giải

a) *I, A', B'* là ba điểm chung của hai mặt phẳng (*OAB*) và (β) nên chúng thẳng hàng
b) *I, J, K* là ba điểm chung của hai mặt phẳng (*ABC*) và (*A'B'C'*) nên chúng thẳng hàng



Hình 1.15

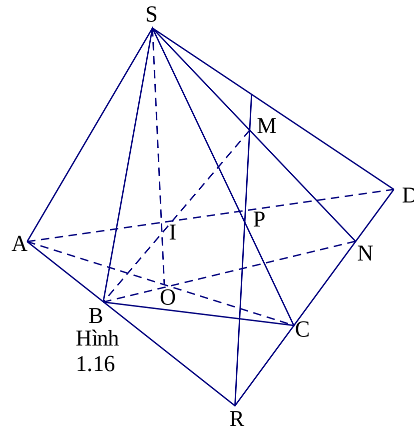
Bài 1.16. Cho hình chóp *S.ABCD* có *AB* và *CD* không song song. Gọi *M* là một điểm thuộc miền trong của tam giác *SCD*.
a) Tìm giao điểm *N* của đường thẳng *CD* và mặt phẳng (*SBM*)
b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBM*) và (*SAC*)
c) Tìm giao điểm *I* của đường thẳng *BM* và mp(*SAC*)
d) Tìm giao điểm *P* của *SC* và mp(*ABM*), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (*SCD*) và (*ABM*).

HD✍Giải

a) Gọi $N = SM \cap CD$. Ta có $N = CD \cap (SBM)$
b) Gọi $O = AC \cap BN$. Ta có: $(SBM) \cap (SAC) = SO$
c) Gọi $I = SO \cap BM$
Ta có $I = BM \cap (SAC)$

d) Gọi $R = AB \cap CD$, $P = MR \cap SC$

Ta có $P = SC \cap (ABM) \Rightarrow PM = (SCD) \cap (ABM)$



Hình 1.16

Bài 1.17. Cho hình chóp S.ABCD. M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SD, G là trọng tâm của tam giác SCD. Tìm giao điểm của:
a) MG và mp(ABCD)
b) BN và mp(SAG)

HD ✍ ***Giải***

a) Do M là trung điểm SA nên $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{1}{2}(1)$

Tronh mp(SCD), có $E = SG \cap CD$

G là trọng tâm tam giác SDC nên $\dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{SM}{SA} \neq \dfrac{SG}{SE}$ nên

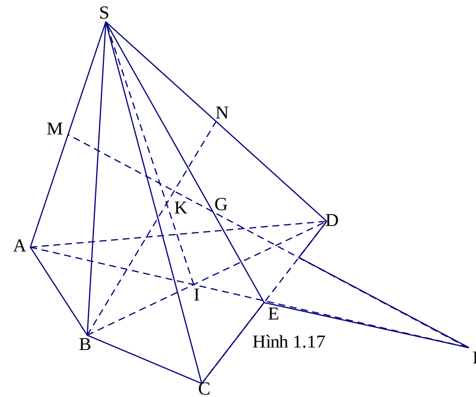
$F = MG \cap AE$. Vậy ta có

$$\left.\begin{array}{l} F \in MG \\ F \in AE \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow F = MG \cap (ABCD)$$

b) Trong mp (ABCD) có $I = AE \cap BD$ và trong mp(SBD) có $K = BN \cap SI$

Ta có

$$\left.\begin{array}{l} K \in BN \\ K \in SI \subset (SAG) \end{array}\right\} \Rightarrow K = BN \cap (SAG)$$

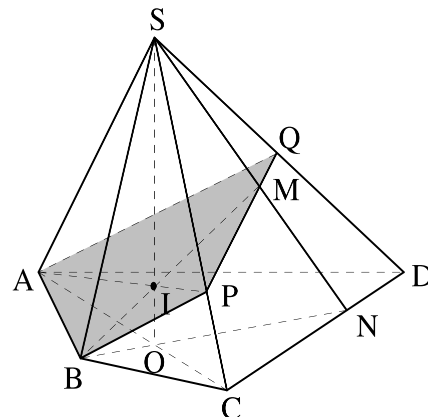


Hình 1.17

Bài 1.18. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm nằm trong tam giác SCD.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC)
c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (ABM)

HD ✍ ***Giải***

a) Gọi N = SM∩CD, O = AC∩BN. Khi đó SO = (SAC) ∩ (SBM).
b) Trong mp(SBM), đường thẳng BM cắt SO tại I. Ta có I=BM∩(SAC).
c) Trong mp(SAC), đường thẳng AI cắt SC tại P. Ta có P và M là hai điểm chung của mp(ABM) và mp(SCD).
vậy (ABM) ∩ (SCD) = PM. Đường thẳng PM cắt SD tại Q. thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(ABM) là tứ giác ABPQ.



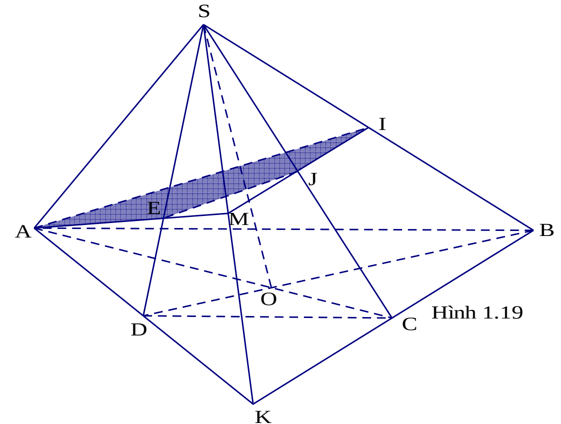
Hình 1.18

Bài 1.19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD (AB//CD, AB > CD). Gọi

I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), (SAC) và (SBD)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mp(AIJ)
c) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp(AIJ)

HD Giải

a) Gọi K là giao điểm của AD và BC, khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có hai điểm ching là S và K. Vậy: $(SAD)\cap(ABC)=SK$
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vậy $(SAC)\cap(ABD)=SO$
b) Gọi M là giao điểm của SK và IJ. Khi đó $(SAD)\cap(AIJ)=AM$. Gọi E là giao điểm của AM và SD thì E chính là giao điểm của SD với mp(AIJ).
c) Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(AIJ) là tứ giác AIJE.



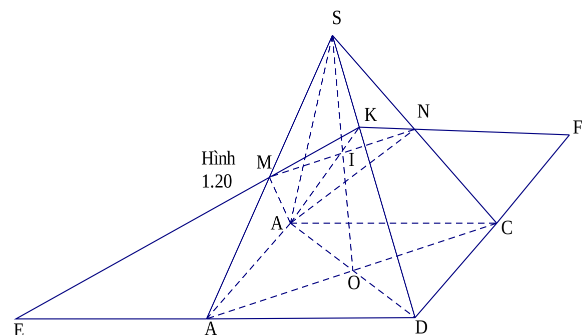
Hình 1.19

Bài 1.20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, gọi O là tâm của đáy; M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B.
a) Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SAB), (SBC)
b) Tìm giao điểm I của SO với mp(P) và giao điểm K của SD với mp(P)
c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SAD), (SDC)
d) Xác định giao điểm E, F của mặt phẳng (P) với các đường thẳng DA, DC và chứng tỏ rằng ba điểm E, B, F thẳng hàng.

HD Giải

a) $(P)\cap(SAB)=BM;(P)\cap(SBC)=BN$
b) Xét mp(SAC), gọi I là giao điểm của SO và MN thì I là giao điểm của SO và mp(P). Gọi K là giao điểm của đường thẳng BI với SD thì K là giao điểm của SD và (P).
c) $(P)\cap(SAD)=MK;(P)\cap(SDC)=KN$
d) Trong mp(SAD) gọi E là giao điểm của đường thẳng MK với đường thẳng AD thì E là giao điểm của (P) và AD.
Tương tự, giao điểm F của KN và DC là giao điểm của (P) và DC

Rõ ràng, B, E, F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (P) và mp(ABCD) nên chúng thẳng hàng.



Hình 1.20

Bài 1.21. Cho tứ diện đều có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B.
a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mp(IJK)
b) Tính diện tích của thiết diện xác định được ở câ a)

HD Giải

a) Nối I và J cắt AC tại N. Nối I và K cắt AB tại M. Tam giác IMN là thiết diện cần tìm.
b) Dễ thấy M là trọng tâm của tam giác ADK, N là trọng tâm của tam giác ADJ. Từ đó:

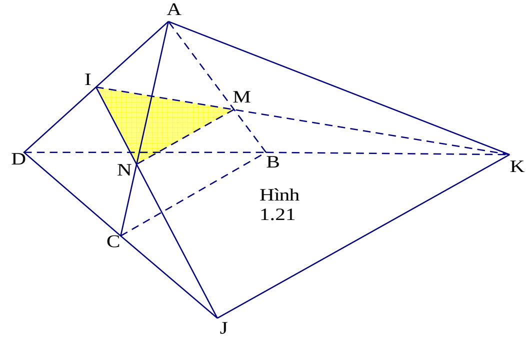
$AN=\frac{2}{3}AC;AM=\frac{2}{3}AB$. Suy ra $AM=AN=\frac{2}{3}a$ và $MN//CB$.

Do đó $MN=\frac{2}{3}CB=\frac{2}{3}a$

Xét tam giác AIM, ta có
$IM^2=AI^2+AM^2-2AI.AM\cos 60^0$
$=\frac{a^2}{4}+\frac{4a^2}{9}-2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\frac{1}{2}=\frac{13}{36}a^2$
$\Rightarrow MI=\frac{a\sqrt{13}}{6}$. Tương tự: $IN=\frac{a\sqrt{13}}{6}$
Vậy theo công thức Hê-rông, ta có:

$S_{\Delta IMN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}+\frac{2}{6}a\right).\frac{2}{6}a.\frac{2}{6}a\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}-\frac{2}{6}a\right)}$

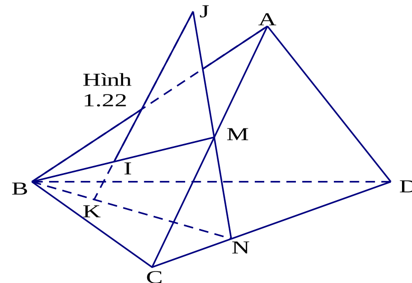
$= \frac{a^2}{6}$ (đvdt)



Bài 1.22. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K theo thứ tự là hai điểm trong tam giác ABC và BCD. Giả sử đường thẳng IK cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Hãy xácđịnh giao điểm J đó.

HD✍Giải

Xét mp(BIK), gọi $M = BI \cap CA, N = BK \cap CD$.
Khi đó $(BIK) \cap (ACD) = MN$ và MN cắt IK tại điểm J. Vậy J là giao điểm của IK và mp(ACD).



Bài 1.23. Cho hình bình hành ABCD nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là điểm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O.
a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng SO
b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

HD✍Giải

a) Trog mặt phẳng (SCA), gọi I là giao điểm của CM và SO. Khi đó $I \in CM \subset (CMN)$

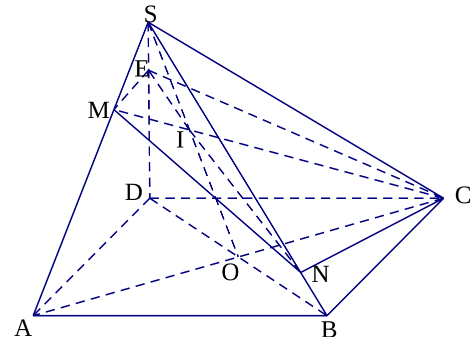
Vậy $I = SO \cap (CMN)$

b) Trong mặt phẳng (SBD), gọi $E = NI \cap SD$

Khi đó, ta có $M \in (CMN) \cap (SAD)$ và

$$\left.\begin{array}{l} E \in NI \subset (CMN) \\ E \in SD \subset (SAD) \end{array}\right\} \Rightarrow E \in (CMN) \cap (SAD)$$

Vậy $ME = (CMN) \cap (SAD)$



Bài 1.24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác. Lấy điểm M, N và P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, AB và BC sao cho chúng không trùng với trung điểm của các đoạn ấy. Tìm giao điểm (nếu có) của mặt phẳng (MNP) với các cạnh của hình chóp.

HD✍Giải

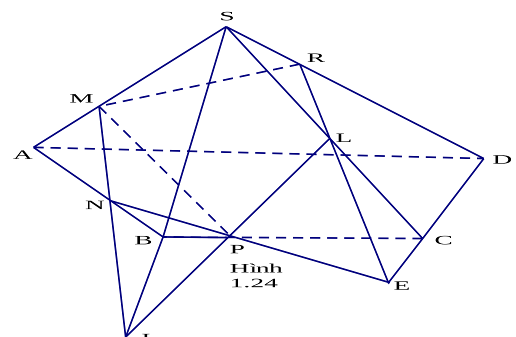
Ta lần lượt tìm giao điểm của mặt phẳng (MNP) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp.
Trong mp(SAB), gọi $I = MN \cap SB$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} I \in MN \\ MN \subset (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow I \in (MNP)$

Vậy: $I = SB \cap (MNP)$

Tương tự: Trong mp(SBC), gọi $J = IP \cap BC$
Trong mp(ABCD), gọi $E = NP \cap CD$
Trong mp(SCD), gọi $K = EJ \cap SD$

Suy ra: $J = SC \cap (MNP)$; $E = CD \cap (MNP)$; $K = SD \cap (MNP)$



Bài 1.25. Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn BC.
a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB)
b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

HD Giải

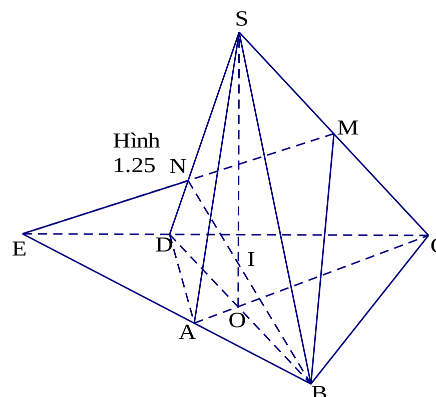
a) Gọi $E = AB \cap CD$. Ta có
$(MAB) \cap (SCD) = ME$

Gọi $N = ME \cap SD$. Khi đó N là giao điểm của SD và mặt phẳng (MAB)

b) Gọi $I = AM \cap BN$

Ta có $\begin{cases} I = AM \cap BN \\ AM \subset (SAC) \\ BN \subset (SBD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow I \in SO$

Điều này chứng tỏ I, S, O cùng thuộc về hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Hay SO, AM, BN đồng quy



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.26. Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Trên ba cạnh AB, AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại H, đường thẳng NK cắt đường thẳng CD tại I, đường thẳng KM cắt đường thẳng BD tại J. Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

Bài 1.27. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Ba điểm M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh SA, SB, SC nhưng không trùng với A, A, B, C. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP)

Bài 1.28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm M của CD và mặt phẳng (C'AE)
b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (C'AE)

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Có hai khả trường hợp sau đây xảy ra đối với a và b

TH1. Có một mặt phẳng chứa a và b

1. a và b cắt nhau tại M, kí hiệu $a \cap b = M$
2. a và b song song với nhau, kí hiệu a // b hoặc b //a
3. a và b trùng nhau, kí hiệu $a \equiv b$

TH2. Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b. Khi đó ta nói a và b chéo nhau.

II. Các định lí và tính chất

1. Định lí 1. Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
2. Định lí 2. (về giao tuyến ba mặt phẳng)
   Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
3. Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
4. Định lí 3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
5. Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.
6. Một mặt phẳng được xác định nếu nó đi qua hai đường thẳng song song.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm giao tuyến hai mặt phẳng

Phương pháp: Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) có điểm chung là *S* và lần lượt chứa hai đường thẳng song song *d* và *d’* thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Δ qua *S* và song song với *d* và *d’*.

Nghĩa là: $\left.\begin{array}{l} S \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \subset (\alpha), d' \subset (\beta) \\ d // d' \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \ (S \in \Delta, \Delta // d // d')$

Bài 2.1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC); (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

HD Giải

a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$

Gọi $O = AC \cap BD$

$\left.\begin{array}{l} O \in (SAC) \\ O \in (SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$

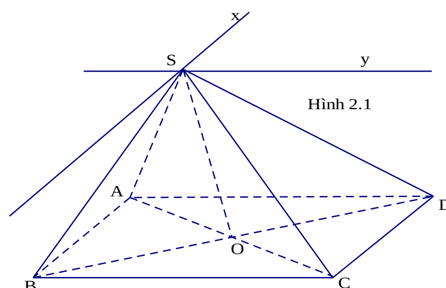
b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in (SAB) \cap (SCD)$

Ta lại có: $\left.\begin{array}{l} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{array}\right\}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx // AB // CD$

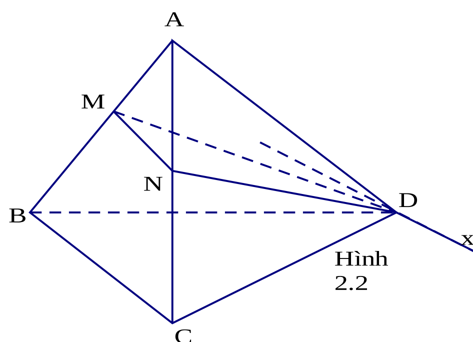
c) Lập luận tương tự câu b) ta có

$(SAD) \cap (SBC) = Sy // AD // BC$



Bài 2.2. Cho tứ diện ABCD. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

HD Giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} M\in AB \\ N\in AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN\subset (ABC)$

Trong tam giác ABC ta có:

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow MN//BC$

Ta lại có: $D\in (DBC)\cap (DMN)$

$\left.\begin{matrix} BC\subset (DBC) \\ MN\subset (DMN) \\ BC//MN \end{matrix}\right\}$

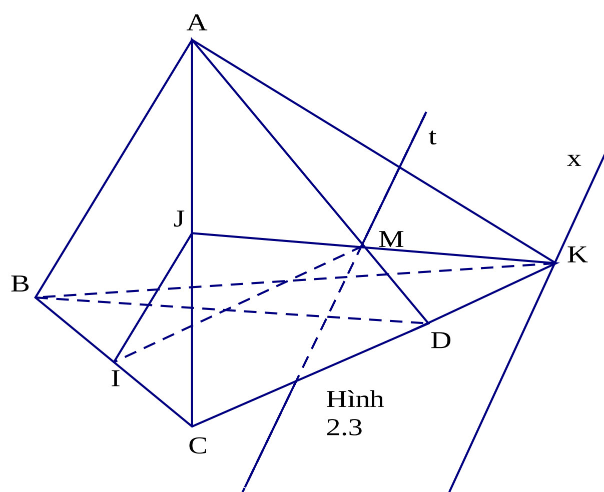
$\Rightarrow (DBC)\cap (DMN)=Dx//BC//MN$

Bài 2.3. Cho tứ diện ABCD. Cho I, J tương ứng là trung điểm của BC và AC, M là một điểm trên cạnh AD sao cho không trùng với trung điểm của AD.

a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD)

b) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng CD và JM. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABK) và (MIJ).

HD Giải



a) Ta có: $\left.\begin{matrix} M\in (MIJ) \\ M\in AD\subset (ABD) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow M\in (MIJ)\cap (ABD)$

Ta cũng có $\begin{cases} IJ//AB \\ IJ\subset (MIJ) \\ AB\subset (ABD) \end{cases}$

$\Rightarrow (MIJ)\cap (ABD)=Mt//IJ//AB$

b) Ta có $\left.\begin{matrix} K\in (ABK) \\ K\in JM\subset (MIJ) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow K\in (MIJ)\cap (ABK)$

và $\begin{cases} IJ//AB \\ IJ\subset (MIJ) \\ AB\subset (ABK) \end{cases}$

$\Rightarrow (MIJ)\cap (ABK)=Kx//IJ//AB$

Bài 2.4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC và BD. Chứng minh rằng tứ giác MPNQ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn, trung điểm đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

HD Giải

Trong tam giác ABC ta có: MP//AC và $MP = \frac{AC}{2}$

Trong tam giác ACD ta có: QN//AC và $QN = \frac{AC}{2}$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} MP//QN \\ MP = QN \end{cases}$ => Tứ giác MPNQ là hình bình hành.

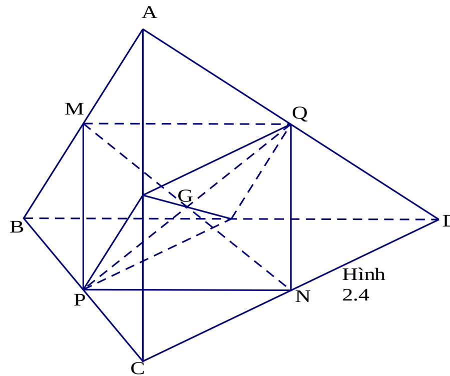
Do vậy hai đường chéo MN và PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đường

Tương tự: PR//QS và $PR = QS = \frac{AB}{2}$

Do đó tứ giác PRQS là hình bình hành

Suy ra hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm G của PQ và OR = OS

Vậy ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn và tại G.



Bài 2.5. Cho tứ diện ABCD có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng : IJ // CD.

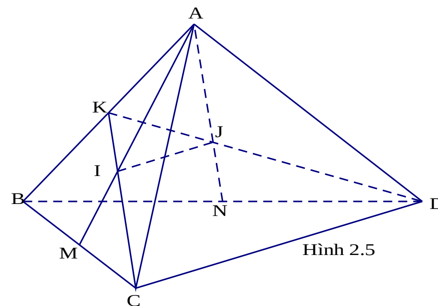
HD✍Giải

Gọi K là trung điểm của AB

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên $I \in KC$ và vì J là trọng tâm tam giác ABD nên $I \in KD$

Từ đó suy ra: $\frac{KI}{KC} = \frac{KJ}{KD} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow IJ//CD$



Bài 2.6. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho 2SM = MA, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho 2SN = NB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD); (SAD) và (SBC)

b) Chứng minh rằng: MN//CD

c) Điểm P nằm trên cạnh SC không trùng với S, C. Tìm giao tuyến hai mp (MNP) và (SCD)

HD✍Giải

a) Ta có: $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Ta có: $\left.\begin{matrix} S \in (SAD) \\ S \in (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow S \in (SAD) \cap (SBC)$

Mặt khác, ta có: $\left.\begin{matrix} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD//BC \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx//AD//BC$

b) Từ giả thiết ta có: $\frac{SM}{MA} = \frac{SN}{NB} = \frac{1}{2}$

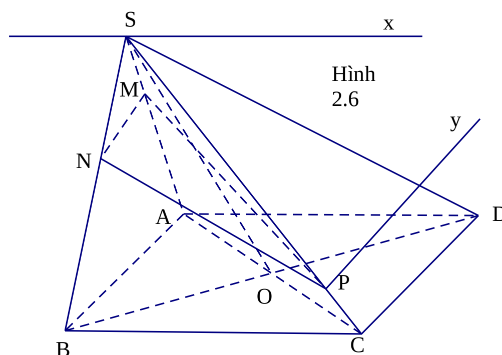
$\Rightarrow MN//AB$ và ABCD là hình bình hành

Suy ra MN//AB//CD.

c)

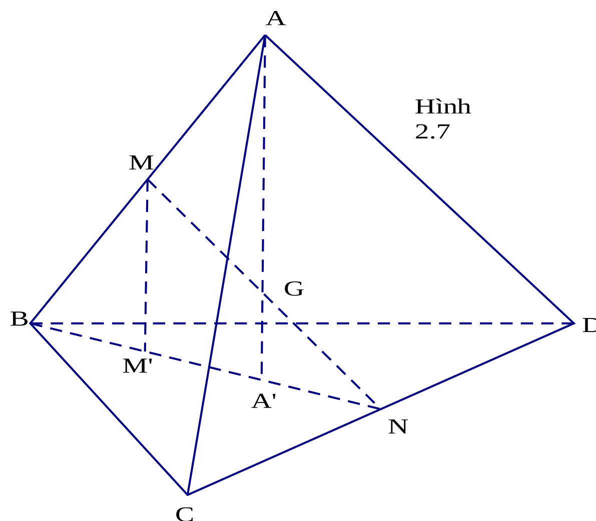
$\left.\begin{matrix} P \in (MNP), P \in (SCD) \\ MN \subset (MNP) \\ CD \subset (SCD) \\ MN//CD \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow (MNP) \cap (SCD) = Py//MN//CD$



Bài 2.7. Cho Tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.
a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).
b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh ba điểm B, M', A' thẳng hàng và BM' = M'A' = A'N
c) Chứng minh GA = 3GA'.

HD✍Giải



a) Gọi $A' = BN \cap AG$, ta có: $A' = AG \cap (BCD)$

b) Ta có: $\begin{cases} AA' \subset (ABN) \\ MM'//AA' \end{cases} \Rightarrow MM' \subset (ABN)$

Ta có B, M', A' là điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (BCD) nên B, M' và A' thẳng hàng.
Trong tam giác NMM', ta có: G là trung điểm NM và GA'//MM' suy ra: A' là trung điểm của NM'
Tương tự trong tam giác BAA', ta có M là trung điểm BA và MM'//AA' suy ra: M' là trung điểm của BA'. Vậy BM' = M'A' = A'N

c) $\begin{cases} GA' = \dfrac{1}{2}MM' \\ MM' = \dfrac{1}{2}AA' \end{cases} \Rightarrow GA' = \dfrac{1}{4}AA' \Rightarrow GA = 3GA'$

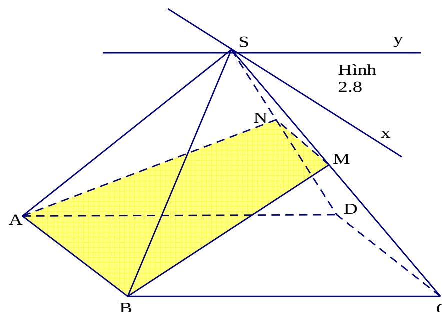
Vấn đề 2. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng
Phương pháp: Ta tìm giao tuyến của mặt phẳng đó với các mặt bên của hình chóp. Đoạn nối giữa các giao tuyến cho ta một hình. Hình đó là thiết diện cần tìm.

Bài 2.8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.
a) Hãy xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD); (SBC) và (SAD)
b) M là điểm thuộc cạnh SC, tìm thiết diện của hình chóp với mp(ABM). Thiết diện là hình gì?

HD✍Giải

a) i). $(SAB) \cap (SCD) = ?$
Ta có
$S \in (SAB) \cap (SCD); AB \subset (SAB);$
$CD \subset (SCD), AB//CD$
Nên $(SAB) \cap (SCD) = Sx//AB//CD$
ii) $(SBC) \cap (SAD) = ?$
Ta có
$S \in (SBC) \cap (SAD); BC \subset (SBC); AD \subset (SAD),$
$BC//AD$. Nên $(SBC) \cap (SAD) = Sy//BC//AD$

b) Ta có:
$(ABM) \cap (ABCD) = AB;$
$(ABM) \cap (SBC) = BM;$
$(ABM) \cap (SDC) = MN//AB//DC, N \in SD$
$(ABM) \cap (SAD) = AN$. Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác ABMN
Rõ ràng: ABMN là hình thang vì MN // AB.



Bài 2.9. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD; E là một điểm thuộc cạnh AD khác với A và D

a) Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mp(IJE)

b) Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành

c) Tìm điều kiện của tứ diện và vị trí điểm E trên cạnh AD để thiết diện là hình thoi

HD Giải

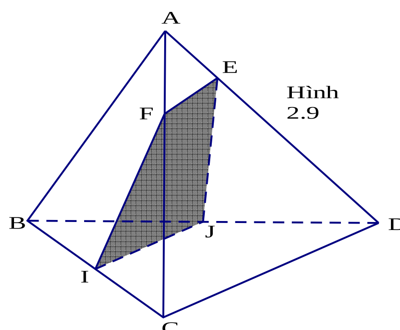
a) Ta có IJ là đường trung bình trong tam giác BCD nên IJ //CD

Mặt khác $IJ \subset (IJE); CD \subset (ACD)$. Suy ra: $(EIJ) \cap (ACD) = Ex // IJ // CD$. Gọi $F = Ex \cap AC$

Thiết diện là hình thang EFIJ

b) Để thiết diện EFIJ là hình bình hành điều kiện cần và đủ là IF // JE. Điều này tương với JE //AB, tức là khi và chỉ khi E là trung điểm của AD.

c) Thiết diện EFIJ là hình thoi khi và chỉ khi EFIJ là hình bình hành và IF = IJ khi và chỉ khi E là trung điểm của AD và AB = CD (vì $IJ = \frac{1}{2}CD$ và khi E là trung điểm của AD thì $IF = \frac{1}{2}AB$)



Vấn đề 3. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp:

1. Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng(như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba, …)
2. Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.
3. Dùng tính chất: Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng(nếu có) cũng song song với hai đường thẳng ấy. Tức là: $\begin{cases} a \in (\alpha) \\ b \in (\beta) \\ a // b \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c // a // b$
4. Dùng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng: $\begin{cases} \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a // b // c \\ a, b \text{ đồng quy} \end{array} \right.$

Bài 2.10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của CB.

a) Chứng minh rằng: MN // BD

b) Xác định thiết diện hình chóp S.ABCD cắt bởi mp(MNE)
c) H và L lần lượt là giao điểm của mp(MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh rằng: LH // BD

HD⁂Giải

a) Gọi M', N' lầm lượt là trung điểm của AB và AD. Dễ thấy: $\left.\begin{matrix} MN//M'N' \\ M'N'//BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//BD$

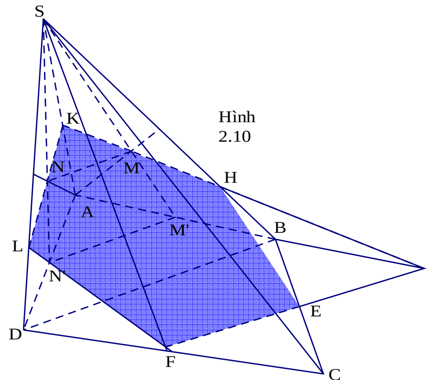
b)Ta có:

$$\left.\begin{matrix} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (ABCD) \\ MN//BD \end{matrix}\right\}$$
$$\Rightarrow (MNE) \cap (ABCD) = Ex//MN//BD$$

Vậy từ E kẻ đường thẳng song song với BD lần lượt cắt CD, AB tại F và I. Nối IM lần lượt cắt SB và SA tại H, K; nối KN cắt SD tại L. Thiết diện cần tìm là ngũ giác KLFEH

c)Ta có:

$$\left.\begin{matrix} MN \subset (MNE) \\ BD \subset (SBD) \\ MN//BD \\ (MNE) \cap (SBD) = LH \end{matrix}\right\} \Rightarrow LH//BD$$



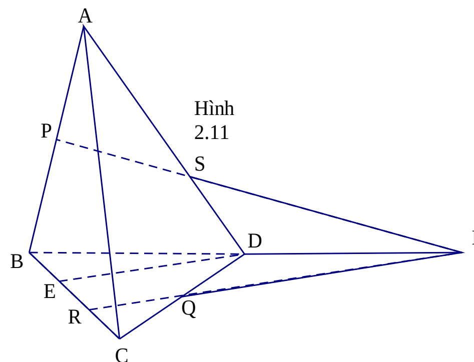
Bài 2.11. Cho tứ diện ABCD. Có các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mp(PQR) và cạnh AD. Chứng minh rằng AS = 2SD.

HD⁂Giải

Gọi $I = RQ \cap BD$, E là trung điểm của BR. Khi đó EB = ER = RC và RQ // ED.

Tam giác BRI có ED // RQ, suy ra $\frac{BD}{DI} = \frac{BE}{ER} = 1$

Vậy DB = DI. Do đó AD và IP là hai đường trung tuyến của tam giác ABI. Suy ra giao điểm S của AD và IP là trọng tâm của tam giác ABI và ta có AS = 2DS



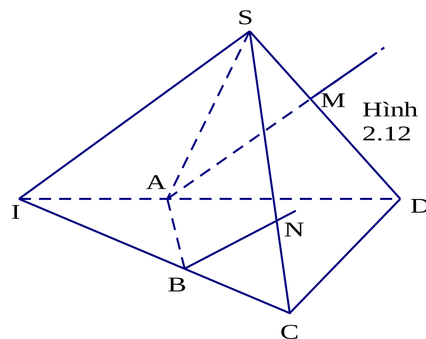
Bài 2.12. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có AD và BC cắt nhau. Hãy tìm điểm M nằm trên cạnh SD và điểm N trên cạnh SC sao cho AM // BN.

HD⁂Giải

Gọi $I = AD \cap BC$. Khi đó $SI = (SAD) \cap (SBC)$

Giả sử $M \in SD, N \in SC$ sao cho AM // BN. Khi đó hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến SI phải song song với AM và BN. Từ đó suy ra cách xác định điểm M và N như sau:

Từ A trong mp(SAD) ta kẻ đường thẳng song song với SI, cắt SD tại M; từ B trong mp(SBC) ta kẻ đường thẳng song song với SI, cắt SC tại N. Khi đó M, N là hai điểm cần tìm.



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 2.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của bốn tam giác SAB, SBC, SCD, SDA. Chứng minh rằng $G_1G_2G_3G_4$ là hình thoi.

Bài 2.14. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên ba cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao điểm S của mp(PQR) với AD nếu:

a) PR // AC b) PR cắt AC.

Bài 2.15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC, N là trung điểm của OB (O là giao điểm của BD và AC)

a) Tìm giao điểm I của SO và mặt phẳng (AMN)

b) Tính tỉ số $\dfrac{SI}{ID}$

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta có ba vị trí tương đối như sau:

1. d và (α) cắt nhau tại M, kì hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$
2. d song song với (α), kí hiệu d // (α) hoặc (α) // d. Như vậy: Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.
3. d nằm trong (α), kí hiệu $d \subset (\alpha)$

II. Định lí và tính chất

1. Định lí 1. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α); nghĩa là: $\left.\begin{matrix} d \not\subset (\alpha) \\ d // d' \\ d' \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // (\alpha)$
2. Định lí 2. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì d' song song với d; nghĩa là $\left.\begin{matrix} d // (\alpha) \\ (\beta) \supset d \\ (\beta) \cap (\alpha) = d' \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // d'$
3. Hệ quả 1. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.
4. Hệ quả2. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó; nghĩa là $\left.\begin{matrix} (\alpha) // d \\ (\beta) // d \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{matrix}\right\} \Rightarrow d // d'$
5. Định lí 3. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (α) ta chứng minh *d* không nằm trong (α) và song song với đường thẳng *a* chứa trong (α). Tức là $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \Rightarrow d // (\alpha) \\ d // a \end{cases}$

Bài 3.1. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho MB = 2MC. Chứng minh rằng MG // (ACD).

HD Giải

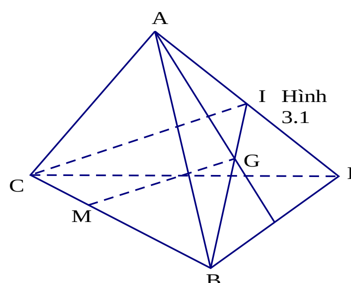
Gọi I trung điểm của AD.

Trong tam giác CBI ta có, $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BG}{BI} = \dfrac{2}{3}$

Nên MG // CI

Mà CI nằm trong mặt phẳng (ACD)

Suy ra MG // (ACD).

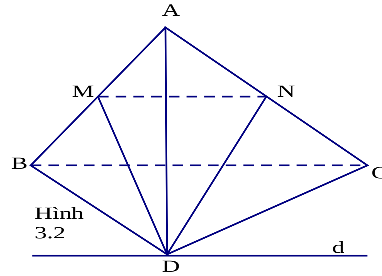


Bài 3.2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mp(BCD)
b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Xét vị trí tương đối của d và mp(ABC)

HD Giải

a) MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // BC. Suy ra MN // (BCD)
b) Vì MN // (BCD) nên (DMN) đi qua MN cắt (BCD) theo giao tuyến d // MN. Do đó d // (ABC).



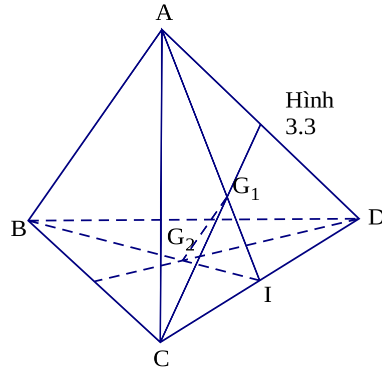
Bài 3.3. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tậm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD)

HD Giải

Gọi I là trung điểm CD
Vì G_1 là trọng tâm của tam giác ACD nên $G_1 \in AI$
Vì G_2 là trọng tâm của tam giác BCD nên $G_2 \in BI$

Ta có: $\left.\begin{matrix} \dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IG_2}{IB} = \dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IB} \Rightarrow G_1G_2 // AB$

$AB \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 // (ABC)$
Và $AB \subset (ABD) \Rightarrow G_1G_2 // (ABD)$



Bài 3.4. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của AE và BF.
a) Chứng minh rằng OO' song song với hai mặt phẳng (ADF) và (BCE).
b) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và ABE. Chứng minh rằng MN // (CEF).

HD Giải

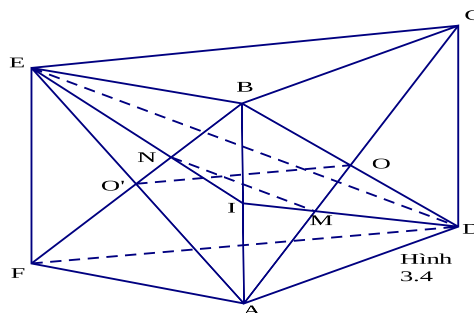
a) Ta có: OO' // DF (đường trung bình của tam giác BDF)
Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' // (ADF)$
Tương tự OO' // EC (đường trung bình của tam giác AEC)
Mà $EC \subset (BCE) \Rightarrow OO' // (BCE)$
b) Gọi I là trung điểm của AB
Vì M là trọng tâm của tam giác ABD nên $M \in DI$
Vì N là trọng tâm của tam giác ABE nên $N \in EI$

Ta có: $\left.\begin{matrix} \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} \Rightarrow MN // DE$

Mà $\begin{cases} CD // AB \\ CD = AB \\ EF // AB \\ EF = AB \end{cases}$

Nên CD // EF và CD = EF, suy ra tứ giác CDEF là hbh.

Do vậy: $\left.\begin{matrix} MN // DE \\ DE \subset (CEF) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN // (CEF)$



Bài 3.5. Cho tứ hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho AD = 3AM.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)
b) Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. CMR: NG // (SCD)
c) Chứng minh rằng MG // (SCD).

HD Giải

a) Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (ABC)

Ta có: $\left.\begin{matrix} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx // AD // BC$

b) Ta có: MN // IA //CD

$\Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$; mà $\frac{IG}{IS} = \frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAB)

Nên $\Rightarrow \frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN // SC$

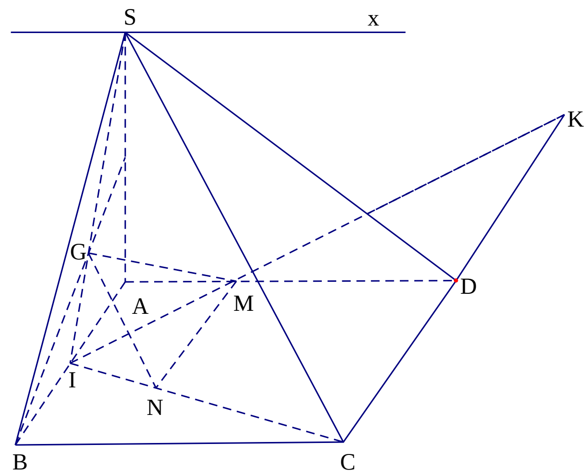
Mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow GN // (SCD)$

c) Gọi $K = IM \cap CD \Rightarrow SK \subset (SCD)$

Mà $MN // CD \Rightarrow \frac{MN}{CK} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IM}{IK} = \frac{1}{3}$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} \frac{IG}{IS} = \frac{1}{3} \\ \frac{IM}{IK} = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow GM // SK$

$\Rightarrow GM // (SCD)$



Bài 3.6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AD và AD = 2BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.
a) Chứng minh rằng OG // (SBC)
c) Cho M là trung điểm của SD. Chứng minh rằng CM // (SAB)
d) Giả sử I nằm trên đoạn SC sao cho $SC = \frac{3}{2}SI$. Chứng minh rằng SA // (BID).

HD Giải

a) Gọi H là trung điểm của SC, ta có: $\frac{DG}{DH} = \frac{2}{3}(1)$

$BC // AB \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC} = \frac{AD}{BC} = 2 \Rightarrow OD = 2OB \Rightarrow \frac{OD}{BD} = \frac{2}{3}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{DG}{DH} = \frac{OD}{BD} = \frac{2}{3}(1) \Rightarrow OG // BH$. Mà $BH \subset (SBC) \Rightarrow OG // (SBC)$

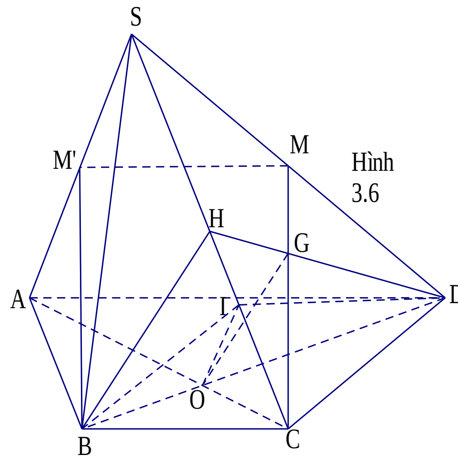
b) Gọi M' là trung điểm của SA $\Rightarrow \begin{cases} MM' // AD \\ MM' = \frac{1}{2}AD \end{cases}$.

Mặt khác vì BC // AD và $BC = \frac{1}{2}AD$ (gt) và BC = MM'. Nên tứ giác BCMM' là hình bình hành

Suy ra CM //BM', mà $BM' \subset (SAB) \Rightarrow CM // (SAB)$

c) Ta có: $\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{OC}{CA} = \frac{1}{3}$.

Mặt khác vì $SC = \frac{3}{2}SI$ nên $\frac{CI}{CS} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{CI}{CS} = \frac{OC}{CA} \Rightarrow OI // SA$ và $OI \subset (BID) \Rightarrow SA // (BID)$



Bài 3.7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.
a) Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).
b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh rằng SB và SC đều song song với mp (MNP)

HD Giải

a)Chứng minh MN //(SBC):

Ta có: $\begin{cases} MN//BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN//(SBC)$

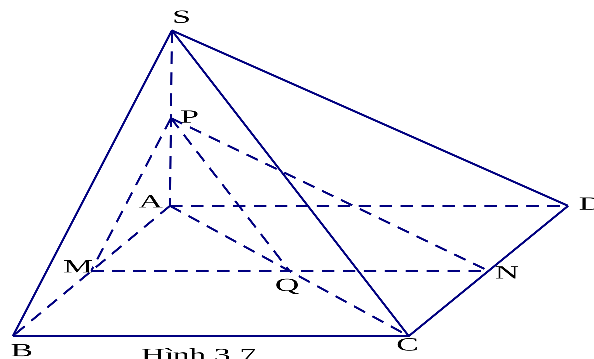
Chứng minh MN // (SAD):

Ta có: $\begin{cases} MN//AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN//(SAD)$

b) Chứng minh SB // (MNP):

Ta có: $\begin{cases} SB//MP \\ MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SB//(MNP)$

Chứng minh S // (MNP):
Gọi $Q = AC \cap MN$. Khi đó Q là trung điểm của AC.
Do đó: SC // PQ (T/c đường trung bình trong tam giác SAC)
mà $PQ \subset (MNP)$. Vậy SC // (MNP)



Hình 3.7

Bài 3.8. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và BCD.
a) Chứng minh rằng: MN // (ACD) và MN // (ABC)
b) Xác định giao tuyến của (DMN) và (ABC). Chứng minh giao tuyến này song song với MN. Tính $\frac{MN}{IJ}$

HD Giải

a) Gọi K là trung điểm của BD. Vì M, N là trọng tâm của các tam giác ABD và BCD nên A, M, K thẳng hàng và C, N, K thẳng hàng, tức là AM cắt CN tại K

Ta có:

$\frac{KM}{KA} = \frac{1}{3}; \frac{KN}{KC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KA} = \frac{KN}{KC} \Rightarrow MN//AC$

Tứ đó: $\left.\begin{matrix} MN//AC \\ AC \subset (ACD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//(ACD)$ và

$\left.\begin{matrix} MN//AC \\ AC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN//(ABC)$

b) Trong mp (ABD): DM cắt AB tại I; trong mp(BCD): DN cắt BC tại J. Khi đó I, J là hai điểm chung của hai (DMN) và (ABC). Suy ra $(DMN) \cap (ABC) = IJ$

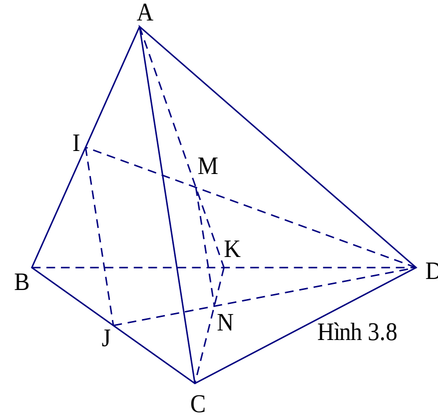
I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC nên IJ là đường trung bình trong tam giác ABC

$\Rightarrow IJ//AC; IJ = \frac{1}{2}AC$. Mà MN // AC (câu a)

nên MN // IJ.

Ta có $IJ = \frac{1}{2}AC$;

$\frac{KM}{KA} = \frac{MN}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}AC$. Từ đó $\frac{MN}{IJ} = \frac{2}{3}$



Hình 3.8

Vấn đề 2. Dựng thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp: Cho đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa *d* và cắt (α) theo giao tuyến *d'* thì *d'* song song với *d*. Nghĩa là: $\left.\begin{array}{l} d//(\alpha) \\ (\beta)\supset d \\ (\beta)\cap(\alpha)=d' \end{array}\right\} \Rightarrow d//d'$

Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

Bài 3.9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD nếu (α) qua M và đồng thời song song với SC và AD.

HD Giải

Vì (α) song song với AD nên (α) cắt hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD) theo hai giao tuyến song song với AD.

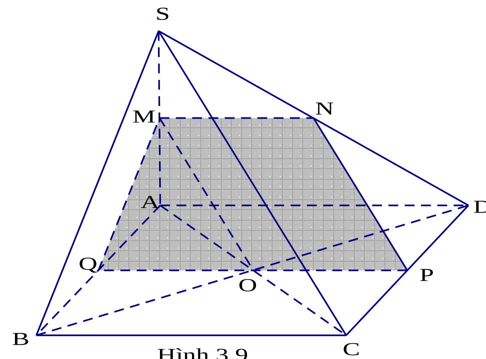
Tương tự (α) song song với SC nên (α) cắt hai mặt phẳng (SAC) và (SCD) theo hai giao tuyến song song với SC.

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có SC//OM(đường trung bình trong tam giác SAC)

Qua O kẻ đường thẳng song song với AD, cắt AB và CD tại Q và P. Qua M, kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại N.

Theo nhận xét trên, ta có MN // PQ // SC

Vậy thiết diện là hình thang MNPQ



Hình 3.9

Bài 3.10. Cho tứ diện ABCD. Trên AB lấy điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD.

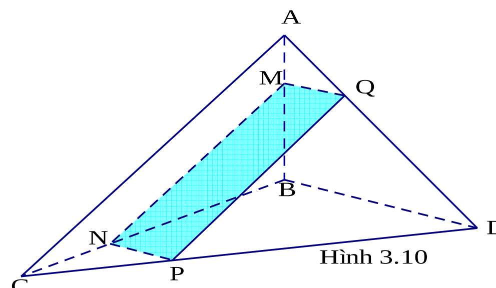
a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

HD Giải

a) Giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện là các cạnh của tứ giác MNPQ có: MN // PQ //AC và MQ // NP // BD

b) Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với tứ diện là hình bình hành MNPQ



Hình 3.10

Bài 3.11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì?

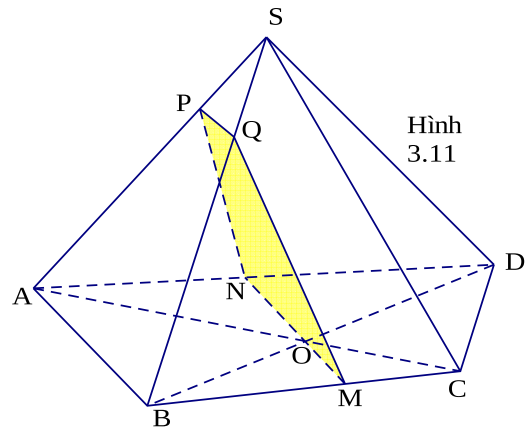
HD Giải

Ta có: $\left.\begin{matrix}(\alpha)//AB\\ AB\subset(ABCD)\\ (\alpha)\cap(ABCD)=MN\end{matrix}\right\}\Rightarrow MN//AB$

$\left.\begin{matrix}(\alpha)//SC\\ SC\subset(SBC)\\ (\alpha)\cap(SBC)=MQ\end{matrix}\right\}\Rightarrow MQ//SC$

$\left.\begin{matrix}(\alpha)//AB\\ SC\subset(SAB)\\ (\alpha)\cap(SAB)=PQ\end{matrix}\right\}\Rightarrow PQ//AB$

Vậy MN // PQ. Do đó tứ giác MNPQ là hình thang

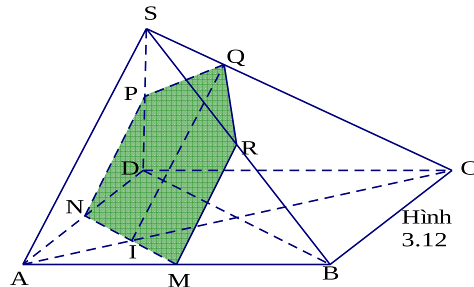


Bài 3.12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA.

HD Giải

Qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt AD tại N và cắt AC tại I. Qua M, I, N vẽ các đường thẳng song song với SA lần lượt cắt SB, SC, SD tại R, Q, P.

Thiết diện là ngũ giác MNPQR.



Bài 3.13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. M là một điểm di động trên đoạn AB. Một mặt phẳng (α) đi qua M và song song với SA và BC; (α) cắt SB, SC và CD tại N, P, Q

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng I nằm trên một đường thẳng cố định.

HD Giải

a) Vì $M\in(SAB)$ và $\left\{\begin{matrix}(\alpha)//AB\\ SA\subset(SAB)\end{matrix}\right.$ nên

$(\alpha)\cap(SAB)=MN$ và MN // AB.

Tương tự $(\alpha)\cap(SBC)=NP$ và NP // BC;

$(\alpha)\cap(SCD)=PQ$; $(\alpha)\cap(ABCD)=MQ$ và MQ // BC. Từ đó suy ra, tứ giác ABCD là hình thang.

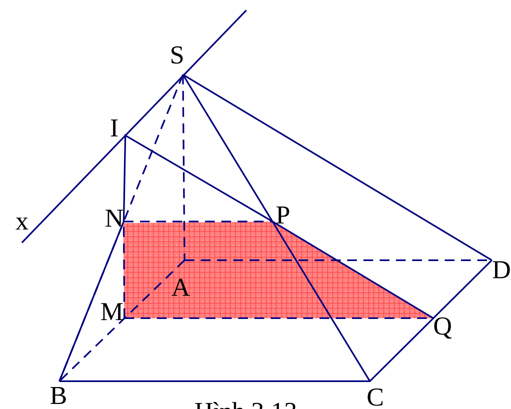
b) Ta có $\left\{\begin{matrix}S\in(SAB)\cap(SCD)\\ AB\subset(SAB),CD\subset(SCD)\\ AB//CD\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)=Sx$ và Sx // AB // CD

$MN\cap PQ=I\Rightarrow\left\{\begin{matrix}I\in MN\subset(SAB)\\ I\in PQ\subset(SCD)\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow I\in(SAB)\cap(SCD)\Rightarrow I\in Sx$

(SAB) và (SCD) cố định nên Sx cố định. Dó đó I thuộc đường thẳng Sx cố định.



Hình 3.13

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3.14. Cho tứ diện ABCD. Qua điểm M nằm trên AC ta dựng được một mặt phẳng (α) song song với AB và CD. Mặt phẳng này lần lượt cắt các cạnh BC, BD và AD tại N, N và Q.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?
b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của tứ giác MNPQ. Tìm tập hợp các điểm O khi M di động trên đoạn thẳng AC.

Bài 3.15. Cho tứ diện ABCD. Trọng tâm G của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho BI = 2IC. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, Gọi M là trung điểm của cạnh SC; (P) là mặt phẳng qua M và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P)
b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF với tam giác SCD.
c) Gọi K là giao điểm của ME với CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\frac{EF}{KJ}$

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Định nghĩa: Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu: $(\alpha)//(\beta)$ hoặc $(\beta)//(\alpha)$. Như vậy $(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)\cap(\beta)=\emptyset$

II. Tính chất.

1. Định lí 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β); nghĩa là $\left.\begin{matrix} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b = M \\ a//(\beta), b//(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

Hệ quả: Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b, mặt phẳng (β) chứa hai đường thẳng cắt nhau a' và b' đồng thời a // a', b // b' thì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β).

2. Định lí 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

a) Hệ quả 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng (β) song song với (α).

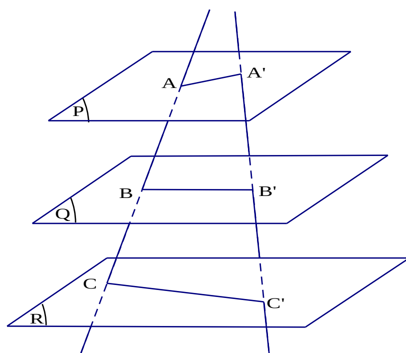
b) Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

c) Hệ quả 3. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

3. Định lí 3. Cho hai mặt phẳng song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

4. Định lí 4(Định lí Ta-lét). Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

5. Định lí Ta-lét đảo.

Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$

Khi đó AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

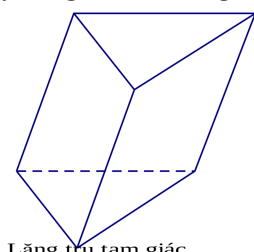
III. Hình lăng trụ và hình chóp cụt

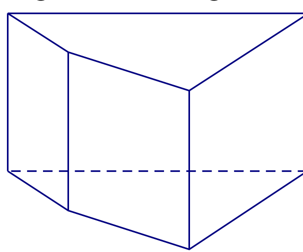
1. Hình lăng trụ

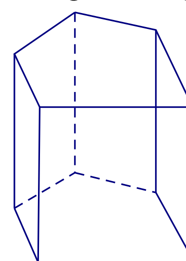
Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song (gọi là hai đáy) và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau (gọi là cạnh bên)

- Hai đáy của hình lăng trụ là các đa giác bằng nhau
- Các mặt khác hai đáy gọi là mặt bên: Mỗi mặt bên là một hình bình hành
- Các mặt tạo bởi hai cạnh bên không liên tiếp gọi là mặt chéo: Mỗi mặt chéo là một hình bình hành
- Đường chéo của các mặt chéo là đường chéo của hình lăng trụ

- Tùy theo đáy, ta gọi hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ lục giác, . . .



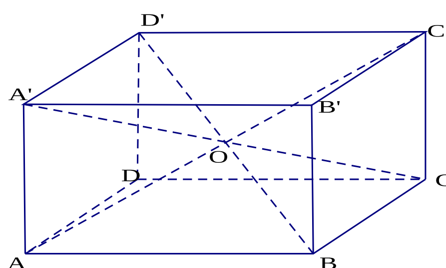




2. Hình hộp

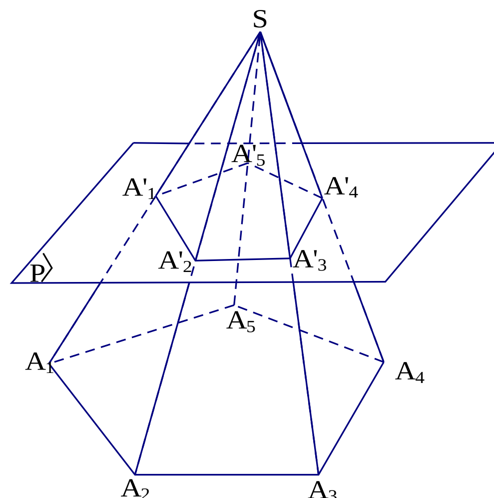
Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

- 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình bình hành
- Các đường chéo của hình bình hành đồng qui tại một điểm là trung điểm của mỗi đường chéo (điểm đó gọi là tâm của hình hộp)
- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật
- Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương



3. Hình chóp cụt

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh $SA_1, SA_2, . . ., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2', ..., A_n'$. Hình toạ bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng các từ giác $A_1'A_2'A_2A_1, A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ được gọi là hình chóp cụt, kí hiệu $A_1'A_2'...A_n'.A_1A_2..A_n$



Hình chóp cụt có:

- Hai đáy là hai da giác có cạnh tương ứng song dong và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau
- Các mặt bên là những hình thang
- Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng qui tại một điểm.

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

1. Vận dụng định lí 1: Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau *a, b* và *a, b* cùng song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β): $\left.\begin{matrix} a\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ a\cap b = M \\ a//(\beta), b//(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

2. Ta chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) cùng song song với mặt phẳng thứ ba (γ)

Bài 4.1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

HD Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB. Ta có:

$M \in AG_1$ và $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{2}{3}$

$N \in AG_2$ và $\dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{2}{3}$

$P \in AG_3$ và $\dfrac{AG_3}{AP} = \dfrac{2}{3}$

Do đó $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN} \Rightarrow G_1G_2 // MN$

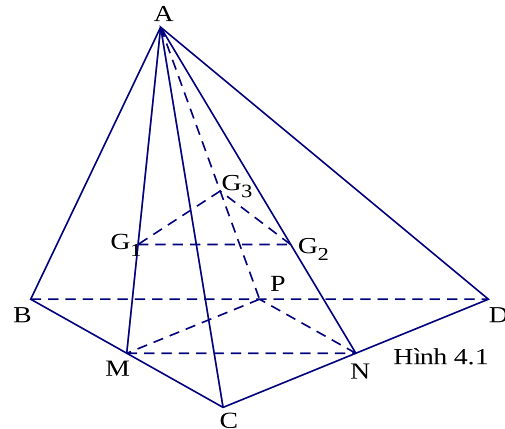
Vì MN nằm trong (BCD) nên $G_1G_2 // (BCD)$

Tương tự $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_3}{AP} \Rightarrow G_1G_3 // MP$

Vì MP nằm trong (BCD) nên $G_1G_3 // (BCD)$.

Như vậy

$$\begin{cases} G_1G_2 \subset (G_1G_2G_3) \\ G_1G_3 \subset (G_1G_2G_3) \\ G_1G_2 \cap G_1G_3 = G_1 \Rightarrow (G_1G_2G_3) // (BCD) \\ G_1G_2 // (BCD) \\ G_1G_3 // (BCD) \end{cases}$$



Hình 4.1

Bài 4.2. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:
a) (ADF) // (BCE)
b) M'N' // DF
c) (DEF) // (MM'N'N) và MN // (DEF).

HD Giải

a) Ta có:

$$\left.\begin{matrix} AD // BC \\ BC \subset (BCE) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD // (BCE)$$

$$\left.\begin{matrix} AF // BE \\ BE \subset (BCE) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AF // (BCE)$$

mà $AD, AF \subset (ADF)$

Nên (ADF) // (BCE)

b) Vì ABCD và ABEF là các hình vuông nên AC = BF.

Ta có: $MM' // CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} (1)$

$NN' // AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} (2)$

Từ (1) và (2): $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' // DF$

c) Từ chứng minh trên suy ra: DF // (MM'N'N)

$$\left.\begin{matrix} NN' // AB \Rightarrow NN' // EF \\ NN' \subset (MM'N'N) \end{matrix}\right\}$$

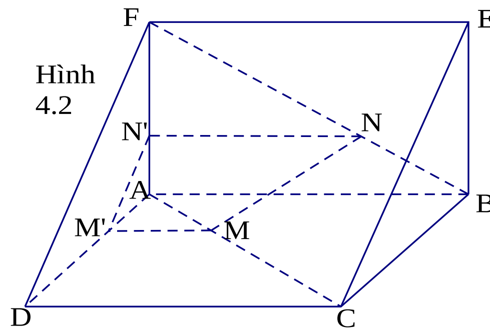
$\Rightarrow EF // (MM'N'N)$

Mà DF, EF chứa trong (MM'N'N)

Nên (DEF) // (MM'N'N)

Vì MN chứa trong (MM'N'N) và (DEF)//(MM'N'N)

Nên MN // (DEF)



Bài 4.3. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi H là trung điểm của A’B’.
a) Chứng minh rằng: CB’ // (AHC’)
b) Tìm giao tuyến d của (AB’C’) và (ABC).

HD Giải

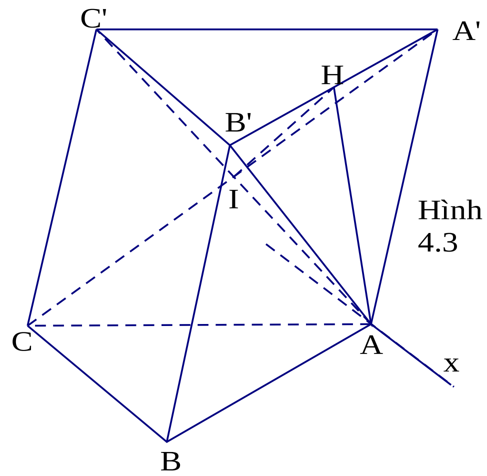
a) Ta có tứ giác AA’C’C là hình bình hành suy ra A’C cắt AC’ tại trung điểm I của mỗi đường.
do đó IH // CB’(đường trung bình của tam giác CB’A’)
Mà IH chứa trong (AHC’) nên CB’ // (AHC’)

b) Ta có $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow A \in (AB'C') \cap (ABC)$

Mà $\begin{cases} B'C' // BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

Nên $(AB'C') \cap (ABC) = Ax // BC // B'C'$



Bài 4.4. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’ có các cạnh bên AA’, BB’, CC’. Gọi I, I’ tương ứng là trung điểm của hai cạnh BC và B’C’.
a) Chứng minh rằng: AI // A’I’
b) Tìm giao điểm của IA’ với mặt phẳng (AB’C’)
c) Tìm giao tuyến d của (AB’C’) và (A'BC).

HD Giải

a) Ta có: II’ // BB’ và II’ = BB’
Mặt khác AA’ // BB’ và AA’ = BB’
nên AA’ // II’ và AA’ = II’
Suy ra AA’I’I là hình bình hành
Suy ra AI // A’I’

b) Ta có : $\begin{cases} A \in (AB'C') \\ A \in (AA'I'I) \end{cases}$

$\Rightarrow A \in (AB'C') \cap (AA'I'I)$

Tương tự : $\begin{cases} I' \in B'C' \subset (AB'C') \\ I' \in (AA'I'I) \end{cases}$

$\Rightarrow I' \in (AB'C') \cap (AA'I'I)$

$\Rightarrow AI' = (AB'C') \cap (AA'I'I)$

Khi đó $AI' \cap A'I = E$. Ta có

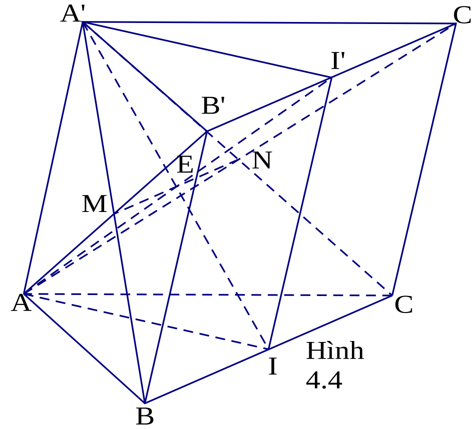
$\begin{cases} E \in IA' \\ E \in AI' \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C')$

Vậy E là giao điểm của A’I và (AB’C’)

c) Ta có: $A'B \cap AB' = M \Rightarrow \begin{cases} M \in (AB'C') \\ M \in (ABC') \end{cases}$

Tương tự: $AC' \cap A'C = N \Rightarrow \begin{cases} N \in (AB'C') \\ N \in (ABC') \end{cases}$

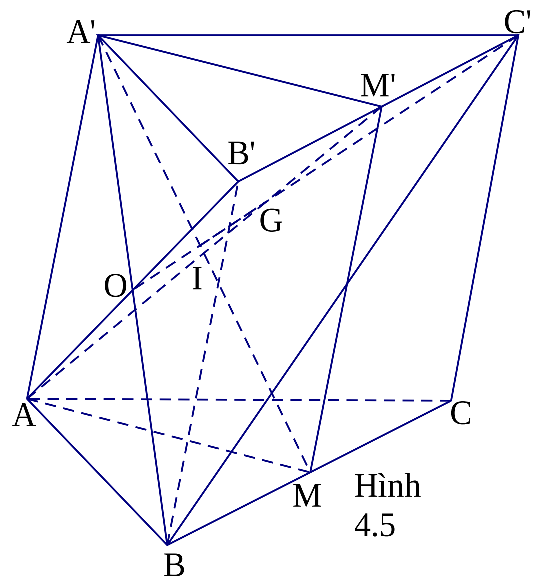
Vậy: $(AB'C') \cap (A'BC) = MN$



Bài 4.5. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'
a) Chứng minh rằng AM song song với A'M'
b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB'C') với đường thẳng A'M
c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C')
d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AM'M). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

HD Giải

a) MM' // BB' và MM' = BB' =>MM' // AB và MM' = AB(hình lăng trụ)
Suy ra tứ giác AA'M'M là hình bình hành => AM // A'M'
b) Gọi $I = A'M \cap AM'$
Ta có:
$\begin{cases} I \in AM' \subset (AB'C') \\ I \in A'M \end{cases} \Rightarrow I = A'M \cap (AB'C')$ c)
$\begin{cases} C' \in (AB'C') \\ C' \in (BA'C') \end{cases} \Rightarrow C' \in (AB'C') \cap (BA'C')$
$AB' \cap A'B = O$
$\Rightarrow \begin{cases} O \in (AB'C') \\ O \in (BA'C') \end{cases} \Rightarrow O \in (AB'C') \cap (BA'C')$
$\Rightarrow d \equiv C'O = (AB'C') \cap (BA'C')$
$d) \begin{cases} d \subset (AB'C') \\ AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow d \cap AM' = G$
$\Rightarrow \begin{cases} G \in d \\ G \in AM' \end{cases} \Rightarrow G \in (AM'M)$
Ta có $OC' \cap AM' = G$
Mà OC', AM' là trung tuyến tam giác AB'C'
Vậy G là trọng tâm của tam giác AB'C'



C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 4.6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, A'B'C', A'CC'. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (IKG) song song với mặt phẳng (BB'CC')
b) Xác định thiết điện của lăng trụ với mặt phẳng (IKG). Thiết diện là hình gì ?
c) Gọi H là trung điểm của BB'. Chứng minh (AHI) // (A'KG).

Bài 4.7. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) (AB'D') // (C'BD)
b) Bốn tâm đối xứng của bốn mặt bên là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Bài 4.8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua M của cạnh bên SA và song song với mặt đáy. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

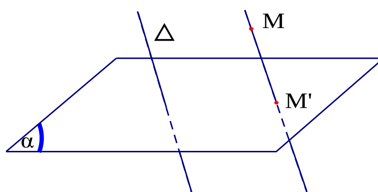
Bài 4.9. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD và điểm M trên cạnh SC. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng qua M và song song với (SAB).

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phép chiếu song song

- Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M và song song hoặc trùng với Δ cắt (α) tại điểm M' xác định.
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.
- Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương của đường thẳng Δ được gọi là phương chiếu.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ



2. Các tính chất của phép chiếu song song (với đường thẳng và đoạn thẳng không song song hoặc trùng với phương chiếu)

- Phép chiều song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó;
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng;
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau;
- Phép chiều song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng

- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể là hình biểu diễn của một tam giác tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, . . .);
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, . . .).
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình đã cho.
- Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn hình tròn.

B. BÀI TẬP

Bài 5.1. Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác A'B'C'. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

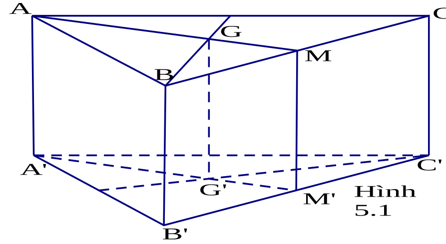
HD Giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC G' là hình chiếu song song của nó. Gọi M là trung điểm của BC thí A, G, M thẳng hàng.

Gọi M' là hình chiếu của M. Khi đó theo tính chất của phép chiếu song song ta có:A', G' M' thẳng hàng và

$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ (1) ; B', M', C' thẳng hàng và $\frac{B'M'}{M'C'} = \frac{BM}{MC} = \frac{2}{3}$ (2)

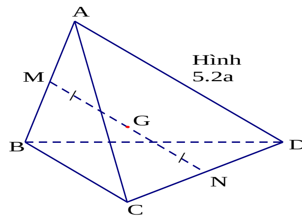
Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

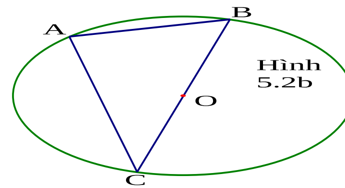


Bài 5.2.
a) Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó.
b) Vẽ hình biểu diễn của tam giác vuông nột tiếp trong đường tròn.

HD Giải

a) Vẽ hình biểu diễn của tứ diện ABCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì trung điểm G của MN sẽ biểu diễn cho trọng tâm của tứ diện.
b) Vẽ elip tâm O là hình biểu diễn của đường tròn đã cho. Lấy hai điểm A và B là hai điểm trên elip sao cho B, C, O thẳng hàng và một điểm A thuộc elip sao cho A khác với B và C. Khi đó, tam giác ABC là hình biểu diễn của một tâm giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.

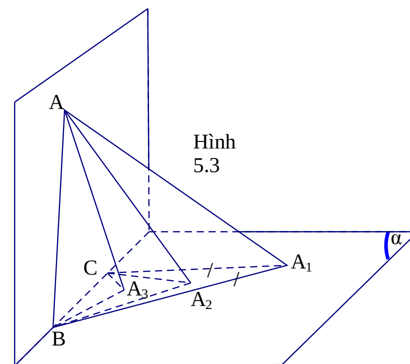




Bài 5.3. Cho tam giác ABC. Hãy chọn mặt phẳng chiếu (α) và phương chiếu của tam giác ABC trên (α) là:
a) Một tam giác cân
b) Một tam giác đều
c) Một tam giác vuông

HD Giải

a) Qua BC dựng một mặt phẳng (α) không đi qua A. Trong mặt (α) ta dựng tam giác cân BCA_1($BA_1 = CA_1$). Khi đó, phép chiếu song song lên (α) theo phương chiếu $\Delta = AA_1$ biến tam giác ABC thành tam giác cân A_1BC.
b) Trong (α) ở câu a), ta dựng tam giác BCA_2 và
c) Chọn phương chiếu $\Delta = AA_2$. Trong mặt phẳng (α) câu a), ta dựng tam giác vuông BCA_3 $\left(\widehat{BA_3C}\right) = 90^0$ và chọn phương $\Delta = AA_3$.

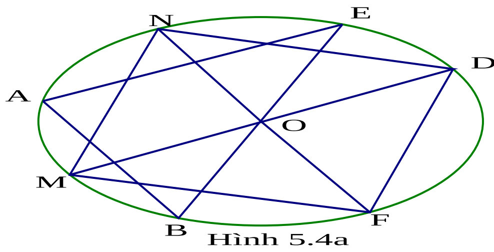


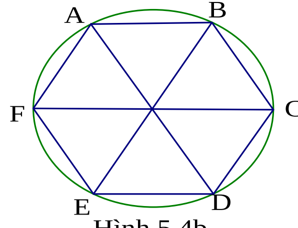
Bài 5.4.
a) Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.
b) Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

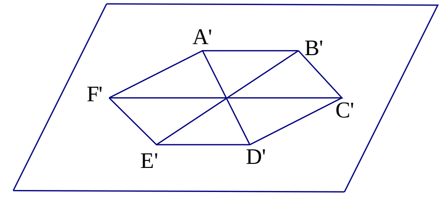
HD Giải

a) Vẽ tam giác tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn (Theo bài 5.2). Qua O ta kẻ hai dây ME và NF của elip lần lượt song song với AC và AB. Khi đó, tứ giác MNEF là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.
b) Xét hình lục giác đều ABCDEF (Hình 5.4b_1), ta nhận thấy:
- Tứ giác OABC là hình thoi
- Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C qua tâm O

Từ đó, suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều ABCDEF như sau:
- VẼ hình bình hành O'A'B'C' biểu diễn cho hình thoi OABC.
- Lấy cá điểm D', E', F' lần lượt đối xứng với các điểm A', B' C' qua O', ta được hình biểu diễn A' B'C'D'E'F' (hình 5.4 b_2) của hình lục giác đều ABCDEF.



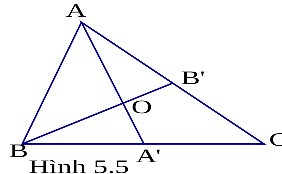




Bài 5.5. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hãy dựng hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều đó.

HD ✍Giải

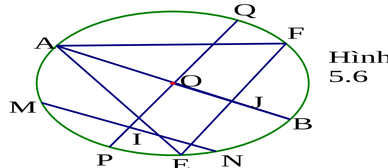
Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều trùng với trọng tâm của tam giác đó, nên hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều chính là trọng tâm của O của tam giác ABC.



Bài 5.6. Cho một elip là hình biểu diễn của một đường tròn. Hãy vẽ hình biểu diễn của mỗi hình sau:
a) Một dây cung và đường kính vuông góc với dây cung đó của đường tròn
b) Hai đường kính vuông góc của đường tròn
c) Một tam giác đều nội tiếp đường tròn.

HD ✍Giải

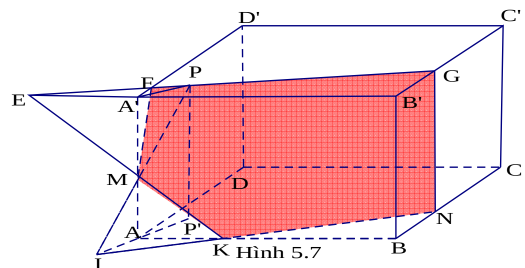
a) Vẽ dây cung MN và một dây cung PQ đi qua tâm O của elip và trung điểm I của MN. Khi đó MN và PQ lần lượt là hình biểu diễn của một dây cung và một đường kính vuông góc với dây cung đó của đường tròn.
b) Sau bước câu a), vẽ dây cung AB qua O và song song với MN. Khi đó PQ và AB là hình biểu diễn của hai đường kính vuông góc với đường tròn.
c) Sau câu a) b), ta vẽ hai dây cung AB và PQ của elip là hình biểu diễn của hai đường kính vuông góc với đường tròn. Từ trung điểm J của OB, vẽ dây cung EF // PQ. Khi đó tam giác AEF là hình biểu diễn của một tam giác đều nội tiếp đường tròn đã cho.



Bài 5.7. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên các cạnh AA', BC lần lượt lấy các điểm M và N không trùng với các đỉnh của hình hộp. Trong hình bình hành A'B'C'D' lấy một điểm P. Hãy xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp(AMN).

HD ✍Giải

Trước hết, ta tìm giao điểm của Pm với mặt phẳng (ABCD). Gọi P' là hình chiếu của P trên mp(ABCD) theo phương chiếu AA'. Khi đó PM cắt P'A tại I. Vì I thuộc mp(ABCD) nên IN cắt AB tại K. Gọi E là giao điểm của KM với A'B'. Nối E với P cắt A'D' và B'C' lần lượt tại F và G. Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác MKNGF.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 5.8. Vẽ hình chiếu của tứ diện ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P)).
Bài 5.9. Vẽ hình chiếu của hình hộp ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AC_1(AC_1 không song song với (P)).

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN CỦA CHƯƠNG II

DẠNG 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp 1. (áp dụng nội dung tính chất 5 của bài 1 sgk/47). Ta tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Cụ thể: $\begin{cases} M \in (\alpha)\cap(\beta) \\ N \in (\alpha)\cap(\beta) \\ M \not\equiv N \end{cases} \Rightarrow MN = (\alpha)\cap(\beta)$

Phương pháp 2. (Áp dụng HQ của nội dung Định lí 2 của bài sgk/57)

Cụ thể: $\begin{cases} (a) \not\equiv (\beta) \\ a//b \\ a \subset (\alpha) \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(\beta) = \Delta, \Delta//a//b$ hoặc trùng với một trong hai đường thẳng *a* và *b*.

Phương pháp 3. (Áp dụng nội dung Định lí 2 của bài 3 sgk/61)

Cụ thể: $\left.\begin{matrix} a//(\alpha) \\ a \subset (\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\beta)\cap(\alpha) = b, b//a$

DẠNG 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Tìm giao điểm của đường thẳng *d* và mặt phẳng (α), phương pháp chung:

- $\left.\begin{matrix} d' \subset (\alpha) \\ d' \cap d = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$
- Chọn mặt phẳng (β) chứa đường thẳng *d* sao cho dễ tìm giao tuyến với (α) là d'

Cụ thể: $\left.\begin{matrix} d \subset (\beta) \\ (\beta)\cap(\alpha) = d' \\ d' \cap d = I \end{matrix}\right\} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$

DẠNG 3. Chứng đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: (áp dụng nội dung Định lí 1 của bài 3 sgk/61)

Cụ thể: $\left.\begin{matrix} d \not\subset (\alpha) \\ d//d' \\ d' \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d//(\alpha)$

DẠNG 4. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: (Áp dụng nội dung Định lí 1 của bài 4 sgk/64)

Cụ thể: $\left.\begin{matrix} a, b \subset (\alpha) \\ a//(\beta), b//(\beta) \\ a \cap b = M \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

DẠNG 5. Dựng thiết diện

Dựng thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (α):

Phương pháp chung: Ta tìm các giao tuyến (nếu có) của (α) với mặt đáy và các mặt bên của hình (H). Đoạn nối giữa các giao tuyến cho ta một hình, hình đó là thiết diện cần tìm.

***Lưu ý*:**

① **Dựng thiết diện song song với một đường thẳng:** (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng trong hình (H) hoặc qua hai điểm và song song với một đường thẳng trong hình (H).

Phương pháp: Cho đường thẳng *d* song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa *d* và cắt (α) theo giao tuyến d' thì d' song song với *d*.

② **Dựng thiết diện song song với một mặt phẳng trong hình (H)**: (α) song song với một mặt phẳng nào đó trong hình (H).

Phương pháp:

✍ *ÁP dụng*: Khi (α) song song với một mặt phẳng (β) nào đó thì (α) sẽ song song với tất cả đường thẳng trong (β).

✍ Để xác định giao tuyến của (α) với các mặt của hình (H), ta làm như sau:

- Tìm đường thẳng *d* nằm trong (β)
- Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên (α) cắt những mặt phẳng chứa *d* theo các giao tuyến song song với *d*.

DẠNG 6. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp:

1. Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng và dùng phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong hình học phẳng(như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba, …)

2. Chứng minh chúng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

3. Dùng tính chất: Hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng(nếu có) cũng song song với hai đường thẳng ấy. Tức là: $\begin{cases} a \in (\alpha) \\ b \in (\beta) \\ a//b \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c//a//b$

4. Dùng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng: $\begin{cases} \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \\ \alpha \cap \beta = c \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a//b//c \\ a,b \text{ đồng quy} \end{array}\right.$

DẠNG 7. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui.

Phương pháp:

✍ Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó chúng thuộc giao tuyến hai mặt phẳng đó.

✍ Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.

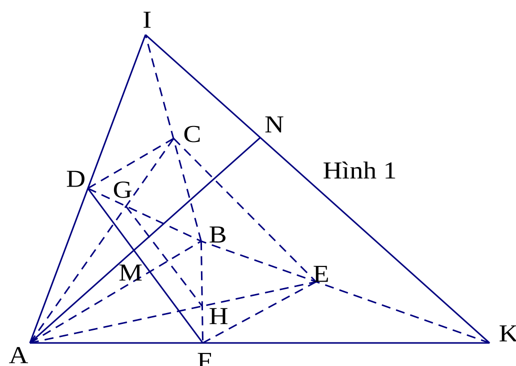
B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng
a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau: (AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF)
b) Lấy M là một điểm thuộc đoạn DF. Tìm giao tuyến của đường thẳng AM với mp(BCE)
c) Chứng minh hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

HD✍Giải

a) Gọi $G = AC \cap BD; H = AE \cap BF$
Ta có $(AEC) \cap (BFD) = HG$
Tương tự: Gọi $I = AD \cap BC; K = AF \cap BE$
Ta có: $(BCE) \cap (ADF) = IK$
b) Gọi $N = AM \cap IK$. Ta có: $N = AM \cap (BCE)$

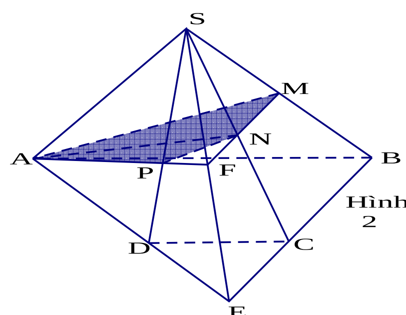
c) Nếu AC và BF cắt nhau thì hai hình thang đã cho cùng nằm trên một mặt phẳng. Điều này trái với giả thiết.



Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang và AB là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN)
Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).

HD Giải

a) Gọi $E = AD \cap BC$. Ta có
$(SAD) \cap (SBC) = SE$
b) Gọi $F = SE \cap MN, P = SD \cap AF$
Ta có: $P = SD \cap (AMN)$
c) Thiết diện là tứ giác APNM

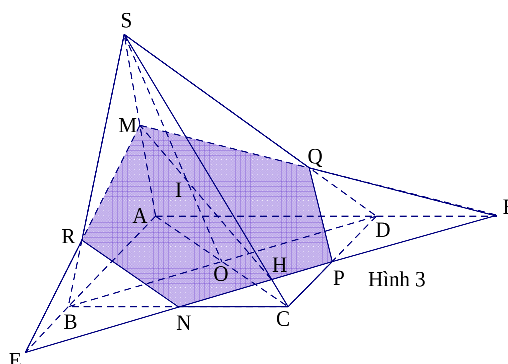


Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi O là giao điểm hai đường chéo, M, N, P, theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng SA, BC, CD.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
b) Tìm giao điểm của đường thẳng SO với mp(MNP).
c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNP).

HD Giải

a) Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO$
b) Gọi $H = AC \cap NP; I = SO \cap MH$
Ta có: $I = SO \cap (MNP)$

c) Gọi $E = AB \cap NP; F = AD \cap NP$
$R = SB \cap ME; Q = SD \cap MF$
Thiết diện cần tìm là ngũ giác MQPNR



Bài 4. Từ các đỉnh của tam giác ABC ta kẻ các đoạn thẳng AA', BB', CC' song song , cùng chiều, bằng nhau và không nằm trong mặt phẳng của tam giác. Gọi I, G và K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC', A'B'C'.
a) Chứng minh rằng (IGK) // (BB'C'C)
b) Chứng minh rằng (A'GK) // (AIB').

HD Giải

a) Gọi M, M' tương ứng là trung điểm AC và A'C', ta có:
$I \in BM, G \in C'M, K \in B'M'$, theo tính chất trọng tâm ta có:

$$\frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG // BC'$$

$$\frac{MI}{MB} = \frac{M'K}{M'B'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IK // BB'$$

Ta có:

$$\begin{cases} IG // BC' \\ BC' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IG // (BB'C'C)$$

$$\begin{cases} IK // BB' \\ BB' \subset (BB'C'C) \end{cases} \Rightarrow IK // (BB'C'C)$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} IG \subset (IGK) \\ IK \subset (IGK) \\ IG \cap IK = I \end{cases}$

Từ đó suy ra: (IGK) // (BB'C'C)

b) Gọi E và F tương ứng là trung điểm của BC và B'C', O trung điểm A'C.A, I, E thẳng hàng nên (AIB') chính là (AEB'). A', G' C thẳng hàng nên (A'GK) chính là (A'CF)

Ta có: B'E // CF (do B'FCE là hình bình hành và AE // A'F nên (AIB') // (A'GK)

Bài 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.
a) Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACB')
b) Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB').

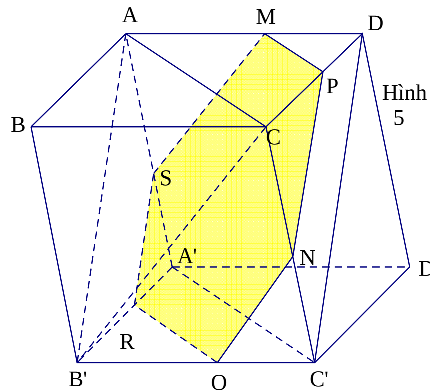
HD Giải

a) Vẽ MP song song với AC và cắt CD tại P

Ta có: $\frac{AM}{MD} = \frac{CP}{PD} = \frac{CN}{NC'}$

Do đó: PN // DC' // AB'
Đường thẳng MN chứa trong (MNP) và mặt phẳng này có MP//AC, PN//AB'.
Vậy (MNP) // (ACB'). Suy ra MN // (ACB')
b) Vì mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ACB') nên hai mặt phẳng đó sẽ cắt các mặt bên của hình hộp theo các giao tuyến song song

Ta vẽ NQ //CB', QR // C'A' // CA, RS // AB' //PN và SM // QN. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mặt phẳng (ACB') là lục giác MPNQRS có các cạnh đối song song với nhau từng đôi một: MP // RQ, PN // SR, NQ // MS.



Hình 5

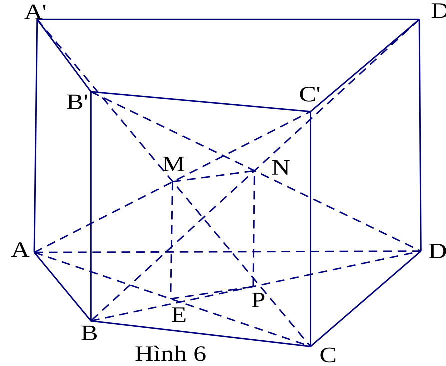
Bài 6. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D'
a) Chứng minh rằng hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau và hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau
b) Cho E, F lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh MN = EF

HD Giải

a) Hình bình hành ACC'A' có hai đường chéo là AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

b) Trung điểm E của AC là hình chiếu của trung điểm M của AC' theo phương của cạnh hình lăng trụ. Tương tự, trung điểm F là hình chiếu trung điểm N của đường thẳng chéo BD' trên BD. ta có: EM // CC' và $EM = \dfrac{CC'}{2}$

Mặt khác: FN // DD' và $FN = \dfrac{DD'}{2}$. Từ đó suy ra tứ giác MNFE là hình bình hành và ta có: MN = EF



Hình 6

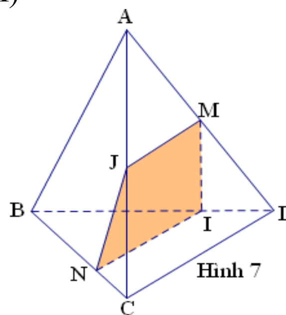
Bài 7. Cho tứ diện ABCD. Trên AD lấy trung điểm M, trên cạnh BC lấy một điểm N bất kì khác B và C. Gọi (P) là mặt phẳng qua đường thẳng MN và song song với CD.
a) Xác định thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(P).
b) Xác định vị trí N trên BC sau cho thiết diện là một hình bình hành.

HD Giải

a) Ta có
$CD \subset (ACD), CD // (P) \Rightarrow (ACD) \cap (P) = MJ$.
Sao cho MJ // CD (J thuôc trên AC)
Tương tự, ta có: $(BCD) \cap (P) = NI$, sao cho NI//CD và I thuộc BD.
Vậy thiết diện là hình thang MINJ (MJ // NI)

b) Ta có: $MJ = \dfrac{CD}{2}$. Vậy để hình thang MINJ là hình bình hành $\Leftrightarrow NI = MJ = \dfrac{1}{2}CD$

Suy ra: N là trung điểm của BC



Hình 7

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AD, BC. Chứng minh rằng IB và JA không nằm trong cùng một mặt phẳng.

HD Giải

Ta dùng phương pháp phản chứng.
Giả sử có một mặt phẳng (α) chứa đồng thời IB và JA. Khi đó ta có:

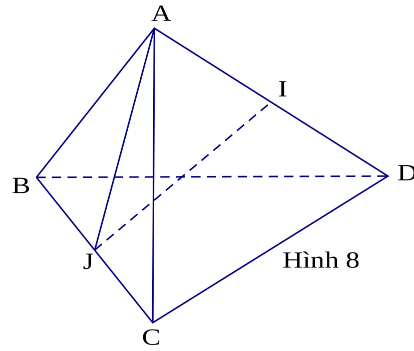
$$IB \subset (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} I \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \end{cases}$$

$$JA \subset (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} J \in (\alpha) \\ A \in (\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C \in BJ \\ BJ \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow C \in (\alpha)$$

$$\begin{cases} D \in AI \\ AI \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow D \in (\alpha)$$

Vậy A, B, C, D cùng thuộc (α). Điều này vô lí vì A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng



Hình 8

Bài 9. Cho tứ diện SABC có E, F lần lượt là trung điểm của SB, AB. Lấy G là một điểm trên đoạn AC sao cho G không trùng với trung điểm của AC. Gọi I là giao điểm của GF và mặt phẳng (SBC)
a) Chứng minh I thuộc đường thẳng BC
b) Xác định thiết diện tạo bởi (EFG) và tứ diện SABC.

HD Giải

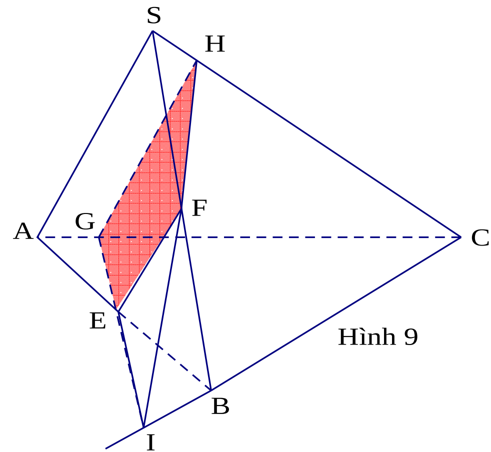
a) $\begin{cases} I \in FG \\ FG \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC)$

$\begin{cases} I \in (ABC) \\ I \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (SBC)$

$\Rightarrow I \in BC$

(Hay nói cách khác, ta đi chứng minh ba điểm I, B, C thẳng hàng)

b) Do EF // SA mà $EF \subset (EFG)$ nên (EFG) // SA. Vậy (EFG) cắt hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) lần lượt theo hai giao tuyến EF và GH cùng song song với SA(H thuộc SC). Ta có thiết diện cần tìm là EFGH



Hình 9

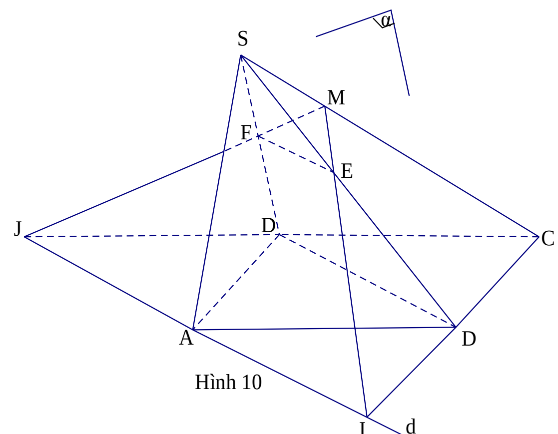
Bài 10.
Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là một điểm di động trên cạnh SC và (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.
a) Chứng minh (α) luôn chứa một đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh SC
b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh SB, SD. Hãy xác định điểm E, F
Gọi I, J lần lượt là giao điểm của ME với BC và MF với CD. Chứng minh rằng ba điểm I, J. A thẳng hàng.

HD Giải

a) (α) song song với BD nên (α) sẽ cắt mp(ABCD) (chứa BD) theo một giao tuyến d đi qua A(điểm chung) và song song với BD. Do A cố định và BD cố định nên d chính là đường thẳng cố định cần tìm

b) Gọi I là giao điểm của d với đường thẳng BC. Giao điểm IM với SB chính là điểm E cần tìm
Tương tự: gọi J là giao điểm của d với đường thẳng CD. Giao điểm của MJ với SD chình là điểm F cần tìm

c) Theo chứng minh trên I, J, A cùng thuộc trên d, nên chúng thẳng hàng.



Hình 10

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD). Chứng minh: IA = 2IM
b) Tìm giao điểm F của SD với (ABM). Chứng minh F là trung điểm của SD
c) Gọi N là một điểm tùy ý trên AB. Tìm giao điểm của MN với (SBD).

HD Giải

a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD):
Gọi $O = AC \cap BD$. Trong mp (SAC), có $I = SO \cap AM$

khi đó $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I = AM \cap (SBD)$

Chứng minh IA = 2IM:
Trong tam giác *SAC*: *AM*; *SO* là trung tuyến và $I = SO \cap AM$
$\Rightarrow$ I là trọng tâm của tam giác SAC => IA = 2IM.

b) Tìm giao điểm F của SD với (ABM)
Trong (SBD), gọi $F = SD \cap BI$,

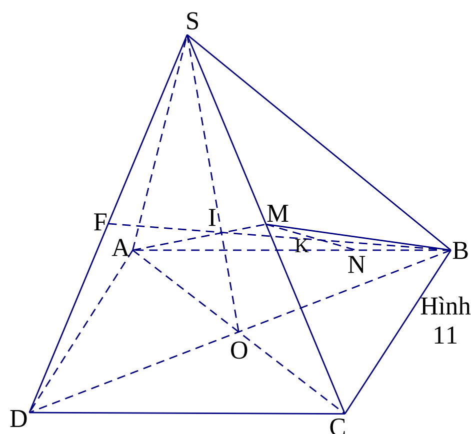
khi đó: $\begin{cases} F \in SD \\ F \in BI \subset (ABM) \end{cases}$

$\Rightarrow F = SD \cap (ABM)$

Chứng minh *F* là trung điểm của *SD*: *I* là trọng tâm tam giác *SAC* => *SI* = 2*IO*
Trong tam giác *SBD* có: *SO* là trung tuyến và *SI* = 2*IO* suy ra *I* là trọng tâm của tam giác SBD.
Từ đó suy ra: *F* là trung điểm của *SD*

c) Tìm giao điểm của *MN* với (*SBD*):
Gọi $K = MN \cap BI$,(Trong (*ABM*)), khi đó

$\begin{cases} K \in MN \\ K \in BI \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có *AB* và *CD* không song song. Gọi *M* là một điểm thuộc miền trong của tam giác *SCD*.
a) Tìm giao điểm *N* của đường thẳng *CD* và mặt phẳng (*SBM*)
b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBM*) và (*SAC*)
c) Tìm giao điểm *I* của đường thẳng *BM* và mp(*SAC*)
d) Tìm giao điểm *P* của *SC* và mp(*ABM*), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (*SCD*) và (*ABM*)

Bài 2. Cho hình chóp *S.ABCD*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm các cạnh *SA*, *SD* và *G* là trọng tâm của tam giác *SCD*. Tìm giao điểm của:
a) *MG* và mp(*ABCD*) b) *BN* và mp(*SAG*)

Bài 3. Cho hình chóp *S.ABCD*. Gọi *M* là một điểm nằm trong tam giác *SCD*.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBM*) và (*SAC*)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng *BM* và mp(*SAC*)
c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (*ABM*)

Bài 4. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang *ABCD* (*AB* // *CD*, *AB* > *CD*). Gọi *I, J* theo thứ tự là trung điểm của các cạnh *SB* và *SC*.
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*), (*SAC*) và (*SBD*)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng *SD* với mp(*AIJ*)
c) Xác định thiết diện của hình chóp *S.ABCD* cắt bởi mp(*AIJ*)

Bài 5. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *M* là điểm giữa *S* và *A*; *N* là điểm nằm giữa *S* và *B*; giao điểm của hai đường thẳng *AC* và *BD* là *O*.
a) Tìm giao điểm của mặt phẳng (*CMN*) với đường thẳng *SO*
b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAD*) và (*CMN*)
c) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (*CMN*).

Bài 6. Cho hình thang *ABCD* và *ABEF* có chung đáy lớn *AB* và không cùng nằm trong một mặt phẳng
a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau: (*AEC*) và (*BFD*); (*BCE*) và (*ADF*)
b) Lấy *M* là một điểm thuộc đoạn *DF*. Tìm giao tuyến của đường thẳng *AM* với mp(*BCE*)

Bài 7. Cho hình chóp *S.ABCD* đáy *ABCD* là hình bình hành. Trên đoạn *SA* lấy điểm *M* sao cho 2*SM* =

MA, trên đoạn *SB* lấy điểm *N* sao cho 2*SN* = *NB*.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*); (*SAD*) và (*SBC*)
b) Chứng minh rằng: *MN* // *CD*
c) Điểm *P* nằm trên cạnh *SC* không trùng với *S*, *C*. Tìm giao tuyến hai mp (*MNP*) và (*SCD*)
Bài 8. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành.
a) Hãy xác định giao tuyến của các mặt phẳng (*SAB*) và (*SCD*); (*SBC*) và (*SAD*)
b) *M* là điểm thuộc cạnh *SC*, tìm thiết diện của hình chóp với mp(*ABM*). Thiết diện là hình gì?
Bài 9. Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình thang và *AB* là đáy lớn. Gọi *M*, *N* theo thứ tự là trung điểm của các cạnh *SB* và *SC*.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*)
b) Tìm giao điểm của đường thẳng *SD* với mặt phẳng (*AMN*)
c) Tìm thiết diện của hình chóp *S.ABCD* cắt bởi mặt phẳng (*AMN*).
Bài 10. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *O* là giao điểm hai đường chéo. Gọi *M*, *N*, *P*, theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng *SA*, *BC*, *CD*.
a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*).
b) Tìm giao điểm của đường thẳng *SO* với mp(*MNP*).
c) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(*MNP*).
Bài 11. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*.
a) Chứng minh rằng *MN* song song với các mặt phẳng (*SBC*) và (*SAD*).
b) Gọi *P* là trung điểm của *SA*. Chứng minh rằng *SB* và *SC* đều song song với mp (*MNP*)
Bài 12. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang, đáy lớn *AD* và *AD* = 2*BC*. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, *G* là trọng tâm của tam giác *SCD*.
a) Chứng minh rằng *OG* // (*SBC*)
c) Cho *M* là trung điểm của *SD*. Chứng minh rằng *CM* // (*SAB*)
d) Giả sử *I* nằm trên đoạn *SC* sao cho $SC = \frac{3}{2}SI$. Chứng minh rằng *SA* // (*BID*).
Bài 13. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang (*AD* // *BC*, *AD* > *BC*). Gọi *M*, *N*, *E* lần lượt là trung điểm của *AB*, *CD*, *SA*.
a) Chứng minh rằng: (*MEN*) // (*SBC*)
b) Trong tam giác *SAD* vẽ *EF* // *AD* $\left(F \in SD\right)$. Chứng minh rằng *F* là giao điểm của mặt phẳng (*MNE*) với *SD*. Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(*MNE*) là hình gì?
Bài 14. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác *ABC*, *ACD*, *ABD*. Chứng minh mặt phẳng ($G_1G_2G_3$) song song với mặt phẳng (*BCD*).
Bài 15. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành *ABCD*, *O* là giao điểm của *AC* và *BD*, *M* là trung điểm của *SA*. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp *S.ABCD* nếu (α) qua *M* và đồng thời song song với *SC* và *AD*.
Bài 16. Cho tứ diện *ABCD*. Trên *AB* lấy điểm *M*. Cho (α) là mặt phẳng qua *M*, song song với hai đường thẳng *AC* và *BD*.
a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện
b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?
Bài 17. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là một tứ giác lồi. Gọi *O* là giao điểm của hai đường chéo *AC* và *BD*. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua *O*, song song với *AB* và *SC*. Thiết diện đó là hình gì?
Bài 18. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm *M* của cạnh *AB*, song song với *BD* và *SA*.
Bài 19. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Gọi *M*, *N*, *P*, theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng *SA*, *BC*, *CD*.
a) Tìm giao tuyến của mp(*SAC*) và mp(*MNP*). Từ đó suy ra giao điểm của đường thẳng *SO* với mp(*MNP*).

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua *M* đồng thời song song với *AB* và *SC*.

Bài 20. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*. Gọi *M*, *N*, *P*, theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng *SA*, *BC*, *CD*.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng *SO* với mp(*MNP*).

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua *M* đồng thời song song với *AB* và *SC*. Thiết diện là hình gì?

Bài 21. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm *SA*, *CD*.

a) Chứng minh rằng (*OMN*) // (*SBC*)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (*OMN*)

Bài 22. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm *SB*, *CD*.

a) Chứng minh rằng: *IJ* //(*SAD*)

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua *IO* và song song với *SC*. Xác định thiết diện của hình chóp *S.ABCD* khi cắt bởi mp(α).

Bài 23. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O*. Gọi *P, Q* lần lượt là trung điểm *SC*, *AB*.

a) Chứng minh rằng (*OPQ*) // (*SAD*)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (*OPQ*)

Bài 24. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành tâm *O*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm *SD*, *BC*.

a) Chứng minh rằng: *MN* //(*SAB*)

Gọi (α) là mặt phẳng qua *MO* và song song với *SA*. Xác định thiết diện của hình chóp *S.ABCD* khi cắt bởi mp(α).

Bài 25. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang (*AB* là đáy lớn). Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SB* và *SC*.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng *AN* với mặt phẳng (*SBD*).

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua *MN* và song song với *CD*. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Bài 26. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Lấy một điểm *M* trên cạnh *SA* nhưng không trùng với *S* và *A*.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng *CM* với mặt phẳng (*SBD*).

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua *M* và đồng thời song song với *AB, SC*. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Bài 27. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* hình bình hành tâm *O*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SC* và *OB*. Tìm giao điểm của *SD* với mặt phẳng (*AMN*).

Bài 28. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là một tứ giác lồi. Gọi *O* là giao điểm của hai đường chéo *AC* và *BD*; *M* là trung điểm của *SD*. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua *M*, song song với *SO* và *BC*.

Bài 29. Cho hình chóp *S.ABCD*, đáy *ABCD* là hình thang với *AB* là đáy lớn. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *SA* và *SD*. Tìm giao điểm của *SC* với mặt phẳng (*BMN*).

Bài 30. Cho hình chóp S.*ABCD*, đáy *ABCD* là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua trung điểm *M* của *CD*, song song với *AC* và *SD*.

Bài 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, M là trung điểm của cạnh SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M, song song với SO và BC.

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (Q) qua O, song song với BM và SD

Bài 32. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD // BC). Gọi M, N, G lần lượt là trung điểm của AB, CD và trọng tâm tam giác SAD.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD)
b) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNG)
c) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử đường thẳng SO cắt mặt phẳng (MNG) tại E. Hãy xác định điểm E.

Bài 33. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua M, N và song song với SB.

Bài 34. CHo hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của hình bình hành CDD'C'.

Bài 35. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' và các trung điểm E, F của các cạnh AB, DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'.

Bài 36. Cho tứ diện đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) đi qua M, N và song song với SB.

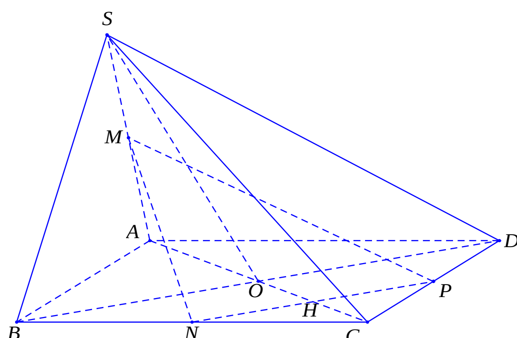
Bài 37. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang (AD//BC, AD > BC). Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng: (MEN) // (SBC)
b) Trong tam giác SAD vẽ EF // AD $\left(F \in SD\right)$. Chứng minh rằng F là giao điểm của mặt phẳng (MNE) với SD. Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(MNE) là hình gì?

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm các đoạn thẳng SA, BC, CD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$ (như hình vẽ). Xác định giao điểm I của đường thẳng SO với mặt phẳng (MNP):



A. $I = SO \cap NP$

B. $I = SO \cap MH$

C. $I = SO \cap MP$

D. $I = SO \cap MN$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC; G là trọng tâm của tam giác BCD. Khi ấy, giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là:

A. Giao điểm của MG và đường thẳng BC
B. Điểm N
C. Điểm C
D. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN

Câu 3: Tìm mệnh đề **Đúng** trong các mệnh đề sau đây:

A. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau

B. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước.

C. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (β)

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β)

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giả sử M thuộc đoạn thẳng SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình gì?

A. Hình chữ nhật **B.** Hình bình hành **C.** Tam giác **D.** Hình thang

Câu 5: Tìm mệnh đề **Đúng** trong các mệnh đề sau đây:

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau
B. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau
C. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau
D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau

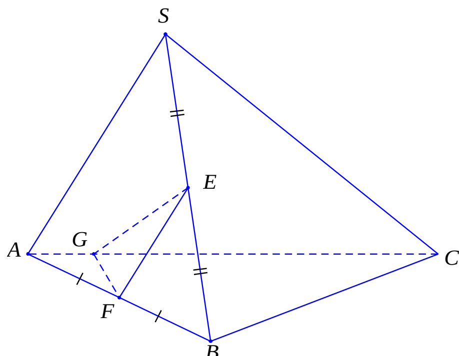
Câu 6: Cho tam giác ABC, lấy điểm I trên cạnh AC kéo dài. Các mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **Sai** ?

A. $BI \not\subset (ABC)$ **B.** $I \in (ABC)$ **C.** $(ABC) \equiv (BIC)$ **D.** $A \in (ABC)$

Câu 7: Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b cùng chứa trong một mặt phẳng là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 3

Câu 8: Cho tứ diện $SABC$ có E, F lần lượt là trung điểm của SB, AB. Lấy G là một điểm trên đoạn thẳng AC sao cho G không trùng với trung điểm AC. Gọi I là giao điểm của GF và mặt phẳng (SBC). Thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:



A. Hình bình hành

B. Hình thang

C. Tam giác

D. Hình thoi

Câu 9: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **Sai** ?

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

B. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

C. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước có nhiều hơn một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

D. Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

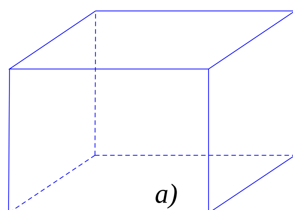
Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Khi ấy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với :

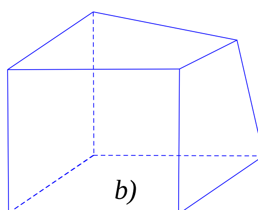
A. Đường thẳng AD **B.** Đường thẳng IJ **C.** Đường thẳng BI **D.** Đường thẳng BJ

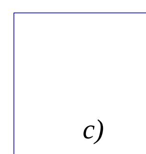
Câu 11: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Kết quả nào sau đây là **Đúng** ?

A. $(ABD)//(EFC)$ **B.** $EC//(ABF)$ **C.** $AD//(BEF)$ **D.** $(AFD)//(BEC)$

Câu 12: Trong các hình sau đây, hình nào biểu diễn cho hình lập phương ?







A. Hình a) **B.** Hình a) và c) **C.** Hình b) **D.** Hình c) và b)

Câu 13: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Đúng** ?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau

B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau

C. Hình chiếu song song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau

D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau

Câu 14: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Đúng** ?

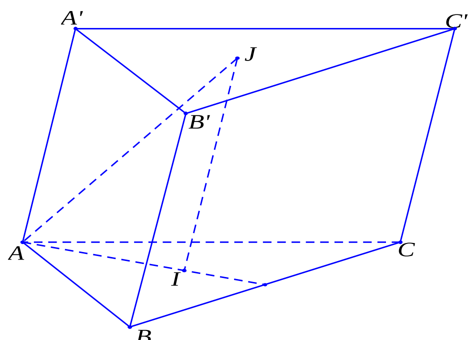
A. Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt kia

B. Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại

C. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau

Câu 15: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi *I, J* lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với lăng trụ đã cho là:



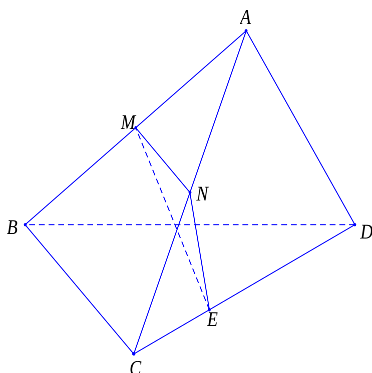
A. Hình bình hành

B. Hình thang

C. Tam giác cân

D. Tam giác vuông

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB* và *AC*, *E* là điểm trên cạnh *CD* với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:



A. Hình bình hành $MNEF$ với *F* là điểm trên cạnh *BD* mà *EF // BC*

B. Hình thang $MNEF$ với *F* là điểm trên cạnh *BD* mà *EF // BC*

C. Tam giác *MNE*

D. Tứ giác $MNEF$ với *F* là điểm bất kì trên *BD*

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$. Thiết diện của mặt phẳng (α) tùy ý với hình chóp không thể là:

A. Tứ giác **B.** Ngũ giác **C.** Tam giác **D.** Lục giác

Câu 18: Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó:

A. Cùng song song với một mặt phẳng **B.** Trùng nhau

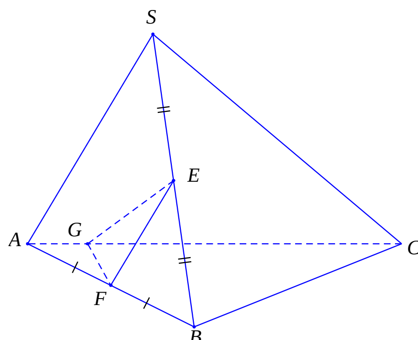
C. Tạo thành một tam giác **D.** Đồng quy

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề **Đúng** trong các mệnh đề sau ?

A. $A'C' \ // \ BD$ **B.** $A'C' \ // \ (SBD)$

C. $A'B' \ // \ (SAD)$ **D.** $(A'C'D') \ // \ (ABC)$

Câu 20: Cho tứ diện $SABC$ có E, F lần lượt là trung điểm của *SB*, *AB*. Lấy *G* là một điểm trên đoạn thẳng *AC* sao cho *G* không trùng với trung điểm AC. Gọi *I* là giao điểm của *GF* và mặt phẳng (*SBC*). Khi đó điểm *I* thuộc :



A. BC

B. AB

C. SA

D. AC

Câu 21: Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M,N* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB* và *AC* . Xét vị trí tương đối của đường thẳng *MN* và mp(*BCD*) là:

A. *MN* nằm trong (*BCD*) **B.** *MN* không song song (*BCD*)
C. *MN* // (*BCD*) **D.** *MN* cắt (*BCD*)

Câu 22: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai** ?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
B. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
D. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia

Câu 23: Cho hai đường thẳng *a* và *b* song song với mặt phẳng (α). Mệnh đề nào **Đúng** trong các mệnh đề sau ?

A. *a* và *b* trùng nhau **B.** *a* và *b* có thể cắt nhau
C. *a* và *b* chéo nhau **D.** *a* và *b* song song với nhau

Câu 24: Cho hai đường thẳng *a* và *b* chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa *a* và song song với *b*?

A. Không có mặt phẳng nào **B.** Ba mặt phẳng
C. Một mặt phẳng **D.** Hai mặt phẳng

Câu 25: Trong các mệnh đề sau đây, tìm mệnh đề **Đúng**

A. Nếu $a//b$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $(\alpha)//(\beta)$ **B.** Nếu $(\alpha)//(\beta)$ và $a \subset (\alpha), b \subset (\beta)$ thì $a//b$
C. Nếu $(\alpha)//(\beta)$ và $b//(\beta)$ thì $a//b$ **D.** Nếu $(\alpha)//(\beta)$ và $a \subset (\alpha)$ thì $a//(\beta)$

Câu 26: Chọn phương án **Đúng**. Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) thì

A. có mọi đường thẳng b không chứa trong (α) song song với a
B. có duy nhất mặt phẳng (β) chứa a và song song với (α)
C. đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (α)
D. có duy nhất mặt phẳng (β) chứa b và b song song với (α)

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác *BCD* và *ACD* thì đoạn G_1G_2 bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2a}{3}$ **B.** $\frac{a}{4}$ **C.** $\frac{a}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 28: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Đúng** ?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau
C. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Câu 29: Có bao nhiêu cách xác định một mặt phẳng ?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 30: Tìm mệnh đề **Sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau
B. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại
C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau
D. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Lấy điểm *M* trên *AB* với $AM = \frac{a}{3}$. Diện tích của thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua *M* và song song với mp(*BCD*) là :

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $AC \cap BD = I; AB \cap CD = J; AD \cap BC = K$. Đẳng thức nào **Sai** trong các đẳng thức sau đây?

A. $(SAC) \cap (SBD) = SI$ **B.** $(SAC) \cap (SAD) = AB$

C. $(SAB) \cap (SCD) = SJ$ **D.** $(SAD) \cap (SBC) = SK$

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng ?

A. M, P, R, S **B.** M, R, S, N **C.** P, Q, R, S **D.** M, N, P, Q

Câu 34: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai** ?

A. Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại

B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng

C. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau

D. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau

Câu 35: Cho hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó ?

A. 3 **B.** 2 **C.** 2 **D.** 4

Câu 36: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai** ?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau

B. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó

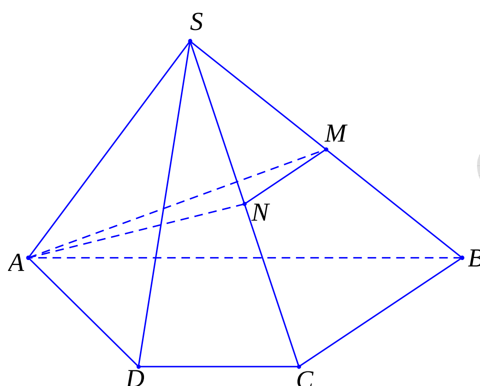
C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau

D. Một đường thẳng có thể song song hoặc trùng với hình chiếu song song của nó

Câu 37: Trong không gian,cho hai mặt phẳng (α) và (β). Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa (α) và (β)?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và BA là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của cạnh SB và SC. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN) là:



A. Hình chữ nhật

B. Hình thanh

C. Hình bình hành

D. Tam giác

Câu 39: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **Sai** ?

A. Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau

B. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau

C. Hình hộp là một hình lăng trụ

D. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành

Câu 40: Ký hiệu nào sau đây sai

A. $A \not\subset (P)$ **B.** $A \in (P)$ **C.** $d \in (P)$ **D.** $A \in d$

Câu 41: Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất ?

A. Bốn điểm **B.** Ba điểm

C. Một điểm và một đường thẳng **D.** Hai đường thẳng cắt nha

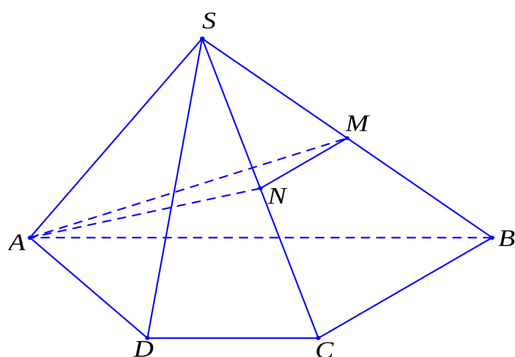
Câu 42: Giữa đường thẳng và mặt phẳng có bao nhiêu vị trí tương đối ?

A. 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường nào sau đây?

A. SC **B.** AC **C.** AD **D.** BD

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và BA là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của cạnh SB và SC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là:



A. SE với $E = AD \cap BC$

B. Đường thẳng $\Delta, (S \in \Delta, \Delta // AD)$

C. SO với $O = AC \cap BD$

D. Đường thẳng $d, (S \in d, d // BC)$

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của ABC và ABD. Diện tích S của thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (BGG') là:

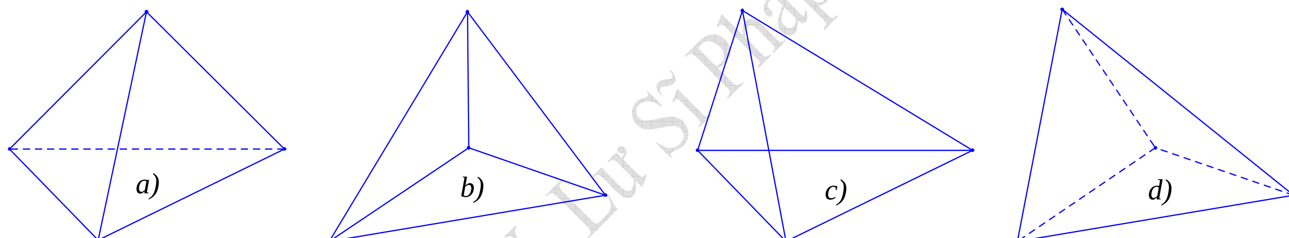
A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{6}$ **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{16}$ **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$ **D.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$

Câu 46: Cho hai đường thẳng *a* và *b*. Điều kiện nào sau đây đủ để kết luận *a* và *b* chéo nhau

A. *a* và *b* là hai cạnh của một tứ diện **B.** *a* và *b* không nằm trên bất kì mặt phẳng nào.

C. *a* và *b* không có điểm chung **D.** *a* và *b* nằm trên hai mặt phẳng phân biệt

Câu 47: Trong các hình sau đây, hình nào biểu diễn của một tứ diện ?



A. Hình a) , b) và d) **B.** Hình a) và c) **C.** Hình b) và d) **D.** Tất cả

Câu 48: Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng song song *a*, *b*. Mệnh đề nào **Đúng** trong các mệnh đề sau ?

A. Nếu (α) song song với *a* thì (α) song song với *b* hoặc chứa *b*

B. Nếu (α) cắt *a* thì (α) có thể song song với *b*

C. Nếu (α) không chứa *a* thì (α) có thể song song với *b*

D. Nếu (α) song song với *a* thì (α) cũng song song với *b*

Câu 49: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **Đúng** ?

A. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau

B. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau

C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung

D. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(EFG) là:

A. Một tam giác **B.** Một tứ giác **C.** Một đoạn thẳng **D.** Một ngũ giác

Câu 51: Cho các giả thiết sau đây. Giả thiết nào kết luận đường thẳng *a* song song với mặt phẳng (α)

A. $a // b$ thì $b // (\alpha)$ **B.** $a \cap (\alpha) = \varnothing$ **C.** $a // (\beta)$ thì $(\beta) // (\alpha)$ **D.** $a // b$ thì $b \subset (\alpha)$

Câu 52: Hãy chọn phương án **Đúng** điền vào chỗ trống

"Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì . . . . . ."

A. ba giao tuyến ấy đôi một song song với nhau

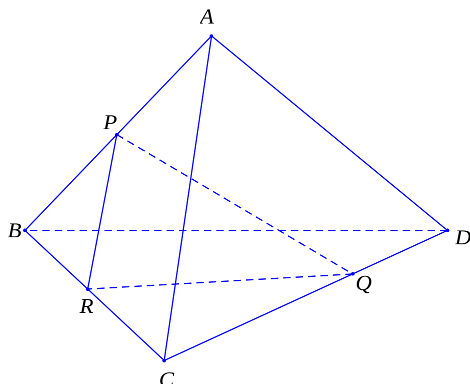
B. ba giao tuyến ấy hoặc trùng nhau hoặc đôi một song song với nhau

C. ba giao tuyến ấy đồng quy và đôi một song song với nhau
D. ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau

Câu 53: Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SCI). Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện là:

A. Hình thoi **B.** Tam giác đều **C.** Tam giác cân tại M **D.** Hình bình hành

Câu 54: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P,Q,R lần lượt lấy trên ba cạnh AB,CD,BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR), biết PR song song với AC.



A. $AD\cap(PQR)=S$ với $QS//PR//AC$

B. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=AD\cap PQ$

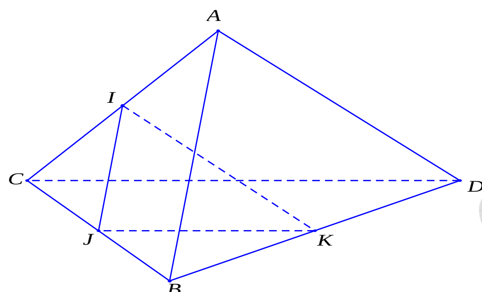
C. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=AD\cap PR$

D. $AD\cap(PQR)=S$ với $PS//BD//RQ$

Câu 55: Cho tam giác ABC. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh tam giác ABC ?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 56: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là



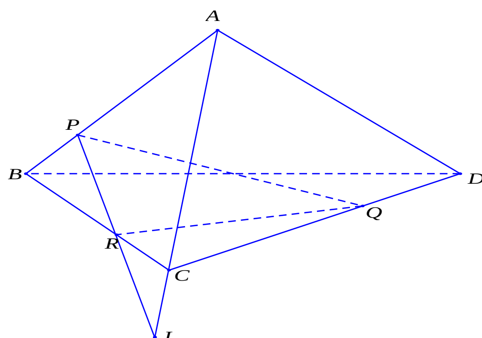
A. IJ

B. KI

C. Đường thẳng qua K và song song với AB

D. KD

Câu 57: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P,Q,R lần lượt lấy trên ba cạnh AB,CD,BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR), biết PR cắt AC tại I.



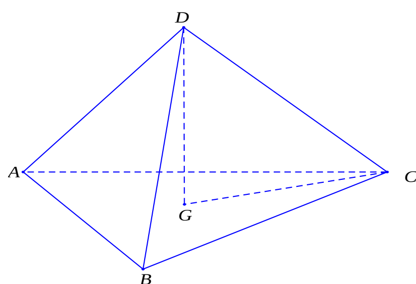
A. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=IQ\cap AD$

B. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=AC\cap IQ$

C. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=AD\cap PQ$

D. $AD\cap(PQR)=S$ với $S=RQ\cap AD$

Câu 58: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) thì diện tích S của thiết diện là:



A. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

C. $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ **D.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 59: Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng a . Gọi *I* là trung điểm của *AB*, *M* là điểm di động trên đoạn *AI* và $AM = x$. Qua *M* vẽ mặt phẳng (α) song song với (SCI). Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện là tam giác cân tại *M*. Chu vi của thiết diện là:

A. $2x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **B.** $x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **C.** $3x\left(1+\sqrt{3}\right)$ **D.** $2x\left(1+2\sqrt{3}\right)$

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song. Giả sử $AC \cap BD = I; AD \cap BC = O$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (*SAC*) và (*SBD*) là:

A. SB **B.** SI **C.** SO **D.** SC

Câu 61: Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng, có thể xác định nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó ?

A. 6 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 62: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm *M* thuộc đoạn AC . Mặt phẳng (α) qua *M* song song với *AB* và *AD* . Thiết diện của (α) với tứ diện *ABCD* là:

A. Hình chữ nhật **B.** Hình vuông **C.** Hình tam giác **D.** Hình bình hành

ĐÁP ÁN
CHƯƠNG II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A					■	■									■					■
B	■							■				■				■				
C									■	■				■						
D		■	■	■			■				■		■				■	■	■	

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A		■						■					■							
B			■			■						■			■	■		■	■	
C	■			■			■			■				■			■			■
D					■				■		■									

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A				■			■	■		■				■	■		■		■	
B					■	■					■							■		■
C		■	■						■				■			■				
D	■											■								

	61	62
A		
B		
C		■
D	■	